LUKION LYHYT MATEMATIIKKA

Sanna Hassinen

Katariina Hemmo

Timo Taskinen

SIGMA

Kertauskirja

Sanoma Pro Oy
Helsinki

Tiedustelut
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy

Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio tuotteesta
ISBN 978-952-63-2010-6 Sigma Kertauskirja

12 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2354-1
48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2355-8

Toimitus: Anssi Tuovinen, Juho Niemelä
Ulkoasu: Riitta Piuva
Taitto: Tmi Sivunvalmistus Pirjo Seppä
Kansi: Riitta Piuva

Piirrokset: Marvegraf Oy, Marja Venäläinen
Valokuvat: Eduskunta / Lehtikuva / Matti Björkman (s. 116); Gorilla / Matti Niemi (s. 141); Kuvaliiteri / Raimo Korhonen (s. 24); www.kuvatoimisto.com (s. 22, 46, 60, 64, 85, 97, 117, 123, 151, 153, 155, 158, 160); www.laplandfinland.com / Oy Lapland Marketing Ltd (s. 33, 34); Majakivi Oy (s. 104); Nokia (s. 153); Rovaniemen kaupunki (s. 86, 140); Savonlinnan kaupunki / Mari Ovaska (s. 146); Shell (s. 69); SKOY / Hannu Lindroos (s. 142), The Cover Story (s. 145) / Corbis / Bettmann (s. 96), George B. Diebold (s. 30), Frans Lanting (s. 54, 58) / SPL / Steve Horrell (s. 40), NCAR (s. 32); Tammen kuva-arkisto (s. 15, 16); Tampereen Työväen Teatteri / Jaakko Vuorenmaa (s. 148); Unicef (s. 67)

© Sanna Hassinen, Katariina Hemmo, Timo Taskinen ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot
Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Kopiosto ry myöntää teosten osittaiseen kopiointiin lupia. Tarkistakaa, mitkä valokopiointi- ja digiluvat ovat kohdallanne voimassa. Lisätietoja luvista www.kopiosto.fi

Teoksen tai sen osan muuntelu on kielletty.

Sisällys

1 Työvälineitä I – Ensimmäisen ja toisen asteen yhtälöitä 7

Tehtäviä 13

2 Planeetta Maa 15

2.1 Kulmia ja pituuksia 16
Tehtäviä 23
2.2 Pinta-aloja ja tilavuuksia 27
Tehtäviä 35
2.3 Prosentit, suhde ja verrannollisuus 38
Tehtäviä 44

3 Työvälineitä II – Potenssi- ja eksponenttiyhtälöt 47

Tehtäviä 52

4 Luonnonvarat ja kestävä kehitys 54

4.1 Eksponentiaalinen malli 55
Tehtäviä 62
4.2 Lukujonot ja summat 65
Tehtäviä 71

5 Työvälineitä III – Suora ja paraabeli 74

Tehtäviä 82

6 Asuminen ja rakentaminen 85

6.1 Suora ja paraabeli matemaattisina malleina 86
Tehtäviä 93
6.2 Useamman muuttujan yhtälöitä ja epäyhtälöitä 97
Tehtäviä 105

7 Työvälineitä IV – Funktion analysoiminen 108

Tehtäviä 114

8 Yhteiskunta 116

8.1 Funktion tulkintaa 117
Tehtäviä 125
8.2 Tilastotieteen peruskäsitteitä ja tunnuslukuja 128
Tehtäviä 135

9 Vapaa-aika 140

9.1 Todennäköisyyden perustilanteita 141
Tehtäviä 149
9.2 Todennäköisyysjakaumia 153
Tehtäviä 159

Ylioppilaskokeet ja niiden ratkaisut 161

Tehtävien vastaukset 186

Hakemisto 193

Alkusanat

Sigma Σ on lukion lyhyen matematiikan kertauskirja, joka kertaa kaikki lukion lyhyen matematiikan pakollisten kurssien asiat. Kirja rakentuu työvälineluvuista, soveltavista luvuista ja ylioppilaskokeista ratkaisuineen.

Työvälineluvut

Työvälinelukuihin on koottu asioita perusharjoittelua varten. Nämä luvut eivät sisällä sanallisia sovellustehtäviä, vaan pääpaino on laskurutiinia vaativien työvälineiden kertaamisessa.

Soveltavat luvut

Soveltavat luvut sisältävät pelkästään sanallisia tehtäviä. Soveltavien lukujen teoria on koottu lyhyesti tietolaatikoihin esimerkkien viereen. Jokainen soveltava luku käsittelee omaa teemaansa, kuten maapalloa tai kestävää kehitystä. Teemat on pyritty valitsemaan opetussuunnitelmassa esitetyt aihekokonaisuudet huomioiden.

Soveltavissa luvuissa asioita ei käsitellä kursseittain vaan eri kurssien asioita on sekoitettu sopiviksi kokonaisuuksiksi. Näin ne vastaavat paremmin ylioppilaskirjoitusten vaatimuksiin.

Jokainen soveltava luku alkaa käsitekartalla, josta näkee nopeasti kyseisessä luvussa kerrattavat asiat ja niihin liittyvät tärkeimmät käsitteet.

Tehtävät

Soveltavien lukujen ensimmäiset tehtävät ovat samankaltaisia kuin kirjan esimerkit. Tehtäväosion alussa on jokaisesta kirjan esimerkistä vastaavanlainen tehtävä. Ne on merkitty viittauksin E1, E2, jne. Tämä tukee hyvin tuntien itsenäistä harjoittelua ja auttaa pääsemään laskemisen alkuun.

Ylioppilastehtävät

Kaikki kirjan luvut sisältävät aihepiiriin liittyviä ylioppilastehtäviä. Tämän lisäksi kirjan loppuun on koottu kolme ylioppilaskoetta ratkaisuineen.

Opettajan materiaali

Kirjaan on koottu pakollisten kurssien keskeisimmät asiat. Yksittäisten asioiden perusharjoittelu on suoritettu jo pakollisilla kursseilla, joten se on jätetty tästä kirjasta pois. Kirjan opettajan materiaalissa on runsaasti lisämateriaalia erilaisten asioiden kertaamiseen. Sen avulla opettaja pystyy helposti lisäämään perusharjoitusta niihin aihepiireihin, joihin opiskelijat sitä tarvitsevat. Suosittelemmekin, että opettajat käyttäisivät tätä kirjaa yhdessä opettajan materiaalin kanssa.

Helsingissä, syyskuussa 2006

Katariina Hemmo, Sanna Hassinen, Timo Taskinen

Ohjeita opiskeluun

Harjoittelu

Laske riittävästi perustehtäviä.

- Perusasioiden (esimerkiksi sievennykset, yhtälöiden ratkaisu) tulee olla hyvin hallinnassa, jotta pystyy sovellustehtävissä keskittymään varsinaisen ongelman ratkaisemiseen.
- Riittävä harjoittelu auttaa ymmärtämään käsitteet oikein.
- Helppojen perustehtävien avulla voi kasvattaa itseluottamusta. Onnistuminen innostaa jatkamaan!

Laske riittävästi vaikeampia tehtäviä.

- Vaikeampien ja soveltavien tehtävien avulla oppiminen syventyy.
- Perusasioiden soveltaminen helpottuu.

Laske samoja tehtäviä (tai kirjan esimerkkejä) uudelleen.

- Malliratkaisusta saa apua ongelmatilanteisiin. Näin tehtävä ei jää ratkaisematta.
- Ratkaisun ymmärtäminen ei tarkoita, että tehtävän osaisi ratkaista itse. Itse tekemällä oppii!

Harjoittele ryhmässä.

- Pienessä ryhmässä laskemalla on ongelmatilanteissa helppo pyytää apua.
- Opettamalla muita oppii aina itsekin lisää.
- Yhdessä miettimällä oppii erilaisia tapoja lähestyä tehtävän ratkaisua.

Harjoittele säännöllisesti.

- Säännöllinen harjoittelu pitää laskurutiinin kunnossa.

Ongelmatilanteet

Jos tehtävän ratkaisu ei etene, kokeile esimerkiksi seuraavia keinoja:

- **Yksinkertaista tilannetta.** Näin ratkaisun idea löytyy helpommin.
- **Kokeile** laskea erilaisilla luvuilla, laskutavoilla tai kaavoilla.
- **Listaa** kaikki erilaiset mahdolliset ongelmaan liittyvät tilanteet ja ratkaise ongelma pieninä paloina.
- **Jätä tehtävä hetkeksi ”hautumaan”** ja tee välillä jotain toista tehtävää.
- **Kokoa tehtävän tiedot** taulukoksi tai kaavioksi.

1 Työvälineitä I – Ensimmäisen ja toisen asteen yhtälöitä

Yhtälön ratkaiseminen on yksi välttämättömistä perustaidoista, joita lukion lyhyessä matematiikassa tarvitaan. Monissa soveltavissa tehtävissä ongelma johtaa joko ensimmäisen tai toisen asteen yhtälöön.

Ensimmäisen asteen yhtälöt voidaan sieventää muotoon $ax + b = 0$, jossa a ja b ovat vakioita. Yhtälön termit ovat siis enintään ensimmäisen asteen polynomeja.

Toisen asteen yhtälöt voidaan vastaavasti sieventää muotoon $ax^2 + bx + c = 0$, jossa a on nollasta eroava vakio, mutta b ja c voivat saada mitä tahansa arvoja.

Yhtälöiden ratkaisemisessa voidaan käyttää apuna seuraavia menetelmiä:

- Yhtälön molempia puolia voidaan muokata tavanomaisilla polynomien sievennyskeinoilla. Näitä ovat esimerkiksi samanmuotoisten termien yhdistäminen, sulkujen poistaminen ja termien kertominen.

- Yhtälön molemmille puolille voidaan lisätä sama luku tai termi. Useimmiten tyydytään ”siirtämään” termejä puolelta toiselle, jolloin niiden etumerkit on muutettava.

- Yhtälön molemmat puolet voidaan jakaa samalla nollasta eroavalla luvulla.

- Yhtälön molemmat puolet voidaan kertoa samalla nollasta eroavalla luvulla.

Ensimmäisen asteen yhtälöt ratkeavat edellä mainittujen menetelmien avulla. Toisen asteen yhtälöissä joudutaan useimmiten käyttämään lisäksi ratkaisukaavaa.

		Esimerkkejä
Ensimmäisen asteen yhtälöt	• Voidaan sieventää muotoon $ax + b = 0$ • Yhtälö voi sisältää nimittäjinä reaalilukuja. • Identtiset yhtälöt saadaan sievennettyä muotoon $0 = 0$ tai $0 = c$, c on nollasta eroava vakio.	$5x - 3 = 0$ $x - \frac{2x}{5} = \frac{x-4}{2}$ $4x - 2 = 2(2x - 1)$ $4x - 2 = 4x - 2$ $0 = 0$ tosi $6 - 3x = -3x + 2$ $0 = -4$ epätosi
Toisen asteen yhtälöt	• Täydellinen toisen asteen yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaistaan ratkaisukaavalla $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ • Vaillinaiset toisen asteen yhtälöt voidaan ratkaista myös ilman ratkaisukaavaa: – $ax^2 + c = 0$ neliöjuuren avulla – $ax^2 + bx = 0$ tulon nollasäännöllä.	$x^2 - 2x - 3 = 0$ $4x^2 - 1 = 3$ $x^2 - 5x = 0$
Verrantomuotoiset yhtälöt	• Yhtälö on verranto, jos sen molemmilla puolilla on osamäärä: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. • Verranto ratkaistaan ristiin kertomalla: $ad = bc$. • Ristiinkertominen johtaa joko ensimmäisen tai toisen asteen yhtälöön	$\frac{2-x}{7} = \frac{x}{3}$

ESIMERKKI 1

Ratkaise yhtälö.

a) $-3x-(2-4x)=5(x+2)$ b) $(2x-1)^2=2x(2x-4)$

RATKAISU

a) Poistetaan ensin sulut ja sievennetään yhdistämällä samanmuotoisia termejä.

$$\begin{aligned}-3x-(2-4x)&=5(x+2)\\ -3x-2+4x&=5x+10\\ -3x+4x-5x&=10+2\\ -4x&=12 \quad \big| : (-4)\\ x&=-3\end{aligned}$$

Polynomien kertolasku

$a(b+c) = ab+ac$

$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$

b) Kirjoitetaan potenssimuoto kertolaskuna ja avataan sulut.

$$\begin{aligned}(2x-1)^2&=2x(2x-4)\\ (2x-1)(2x-1)&=2x(2x-4)\\ 4x^2-2x-2x+1&=4x^2-8x\\ 4x^2-4x^2-4x+8x&=-1\\ 4x&=-1 \quad \big| : 4\\ x&=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

VASTAUS

a) $x=-3$ b) $x=-\frac{1}{4}$

ESIMERKKI 2

Ratkaise yhtälö.

a) $4(2-x)+3x=2-x$ b) $6x-2=3(2x-1)+1$

RATKAISU

a)
$$\begin{aligned}4(2-x)+3x&=2-x\\ 8-4x+3x&=2-x\\ -4x+3x+x&=2-8\\ 0&=-6\\ &\text{epätosi}\end{aligned}$$

Yhtälö saadaan sievennettyä väitteeksi, joka on aina epätosi. Tämä tarkoittaa, että yhtälöllä ei ole ratkaisua.

b)
$$\begin{aligned}6x-2&=3(2x-1)+1\\ 6x-2&=6x-3+1\\ 6x-6x&=-3+1+2\\ 0&=0\\ &\text{tosi}\end{aligned}$$

Yhtälö saadaan sievennettyä väitteeksi, joka on aina tosi. Kirjaimen x paikalle voidaan siis sijoittaa mikä tahansa luku. Yhtälön ratkaisuja (juuria) ovat kaikki reaaliluvut.

VASTAUS

a) Yhtälöllä ei ole ratkaisua. b) Ratkaisuja ovat kaikki reaaliluvut.

ESIMERKKI 3 Ratkaise yhtälö $3x - \frac{2x}{3} = 1 - \frac{2x-3}{2}$.

RATKAISU Merkitään ensin nimittäjäksi luku yksi, jos nimittäjää ei ole. Tämän jälkeen kaikki termit lavennetaan samannimisiksi ja nimittäjät kerrotaan pois.

Nimittäjien poistaminen

1. Kirjoita kaikki termit ensin murtolukumuodossa.
2. Lavenna kaikki termit samannimisiksi.
3. Poista nimittäjät kertomalla yhteisellä nimittäjällä.

$$3x - \frac{2x}{3} = 1 - \frac{2x-3}{2}$$

$$\overset{6)}{\frac{3x}{1}} - \overset{2)}{\frac{2x}{3}} = \overset{6)}{\frac{1}{1}} - \overset{3)}{\frac{2x-3}{2}}$$

$$\frac{18x}{6} - \frac{4x}{6} = \frac{6}{6} - \frac{3(2x-3)}{6} \quad \Big| \cdot 6$$

$$18x - 4x = 6 - 3(2x-3)$$

$$14x = 6 - 6x + 9$$

$$20x = 15 \quad \Big| : 20$$

$$x = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

VASTAUS $x = \frac{3}{4}$

ESIMERKKI 4 Ratkaise yhtälö $\frac{2x-1}{5} = \frac{x}{3}$.

RATKAISU Yhtälön molemmilla puolilla on osamäärä, joten se on verranto. Yhtälö ratkaistaan kertomalla ristiin.

$$\frac{2x-1}{5} = \frac{x}{3}$$

$$3(2x-1) = 5x$$

$$6x - 3 = 5x$$

$$6x - 5x = 3$$

$$x = 3$$

Tarkistus:

$$\frac{2 \cdot 3 - 1}{5} = \frac{3}{3}$$

$$\frac{5}{5} = \frac{3}{3}$$

$$1 = 1$$

tosi

VASTAUS $x = 3$

ESIMERKKI 5

Ratkaise yhtälö.

a) $3(x^2 - 1) - 24 = 0$ b) $5x = x^2$

RATKAISU

a) Kun sulut avataan ja sievennetään yhtälön vasenta puolta, havaitaan, että kyseessä on vaillinainen toisen asteen yhtälö.

$$3(x^2 - 1) - 24 = 0$$
$$3x^2 - 3 - 24 = 0$$
$$3x^2 - 27 = 0$$

Ratkaisukaavassa $a = 3$, $b = 0$, $c = -27$.

$$3x^2 = 27 \quad |:3$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm\sqrt{9}$$
$$x = \pm 3$$

b) Siirretään toisen asteen termi yhtälön vasemmalle puolelle, jolloin x voidaan ottaa yhteiseksi tekijäksi ja soveltaa tulon nollasääntöä.

Tulon nollasääntö

Tulo on nolla täsmälleen silloin, kun jokin tulon tekijöistä on nolla.

$a \cdot b = 0$
$a = 0$ tai $b = 0$

$$5x = x^2$$
$$5x - x^2 = 0$$

Ratkaisukaavassa $a = -1$, $b = 5$, $c = 0$.

$$x(5 - x) = 0$$

Tulon nollasäännön mukaan

$$x = 0 \text{ tai } 5 - x = 0$$
$$-x = -5 \quad |:(-1)$$
$$x = 5$$

VASTAUS

a) $x = -3$ tai $x = 3$ b) $x = 0$ tai $x = 5$

ESIMERKKI 6 Ratkaise yhtälö.

a) $-3x^2 - 10x + 8 = 0$ b) $\dfrac{2x+1}{2} = \dfrac{12-x}{2x}, \; x \neq 0$

RATKAISU

a) Täydellinen toisen asteen yhtälö ratkaistaan ratkaisukaavan avulla. Ratkaistavassa yhtälössä $a = -3$, $b = -10$ ja $c = 8$. Sijoitetaan nämä ratkaisukaavaan:

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 8}}{2 \cdot (-3)}$$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{196}}{-6}$$

$$x = \frac{10 + \sqrt{196}}{-6} \quad \text{tai} \quad x = \frac{10 - \sqrt{196}}{-6}$$

$$x = \frac{10 + 14}{-6} \qquad x = \frac{10 - 14}{-6}$$

$$x = -4 \qquad x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

b) Yhtälö on verrantomuotoinen, joten kerrotaan ristiin.

$$\frac{2x+1}{2} = \frac{12-x}{2x}$$

$$2x(2x+1) = 2(12-x)$$

$$4x^2 + 2x = 24 - 2x$$

$$4x^2 + 4x - 24 = 0 \quad \big| : 4$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Ratkaistaan täydellinen toisen asteen yhtälö ratkaisukaavalla.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{-1+5}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-5}{2}$$

$$x = 2 \qquad x = -3$$

VASTAUS a) $x = -4$ tai $x = \dfrac{2}{3}$ b) $x = 2$ tai $x = -3$

Tehtäviä

Ratkaise tehtävien 1–10 yhtälöt.

1. a) $3-3(x+5)=10x+14$ b) $(x-2)^2=(x+2)^2$

2. a) $4x(x+1)-(x-2)=(2x-1)^2$ b) $\frac{5x+3}{2}+\frac{x}{6}=\frac{9x+11}{3}$

3. a) $\frac{x-2}{3}-x=\frac{2-x}{6}$ b) $\frac{3x-1}{2}-\frac{1-2x}{4}=8x-3$

4. a) $(x-3)(x+5)=0$ b) $2x^2=128$

5. a) $x^2+4x-12=0$ b) $-2x^2+18x-40=0$

6. a) $-3x^2+5x=10$ b) $10x-25=x^2$

7. a) $5x(-2x-1)=3x(-x+1)$ b) $-x(-x+3)=-(x^2-5)$

8. a) $(x+2)(x-1)=x(x+1)-2$ b) $4x(4x-6)=(4x-3)^2$

9. a) $x(x^2+2x-3)=0$ b) $2x^3-6x^2-20x=0$

10. a) $\frac{2x-1}{3}=\frac{-x+1}{-2}$ b) $\frac{2x+6}{5x}=\frac{1-4x}{x}$, $x\neq 0$

11. a) Ratkaise yhtälö $3x+4=5-6x$.
    b) Ratkaise yhtälö $12x^2-7x+1=0$. [K2002, 1]

12. Ratkaise yhtälö $x\left(x-\frac{7}{10}\right)=\frac{1}{10}-x$. [K2001, 2]

13. Ratkaise yhtälö $5(3x+1)-4(3-2x)=2x$. Tutki, toteuttaako tämä ratkaisu myös yhtälön $27x^3-54x+17=0$. [S2003, 2]

14. a) Ratkaise yhtälö $15x^2+2x-1=0$.
    b) Millä x:n arvolla lauseke $\frac{4x}{x-1}$ saa arvon 13? [K2003, 1]

15. Määritä lausekkeen x^2-6x+5 arvo sillä x:n arvolla, joka toteuttaa yhtälön $3x+1=0$. [S1998, 1]

16. Ratkaise x yhtälöstä $\frac{ax+b}{cx+d}=3$, kun
    1° $a=2$, $b=-3$, $c=0$, $d=-5$ 2° $a=1$, $b=2$, $c=4$, $d=5$.
    [K1999, 1]

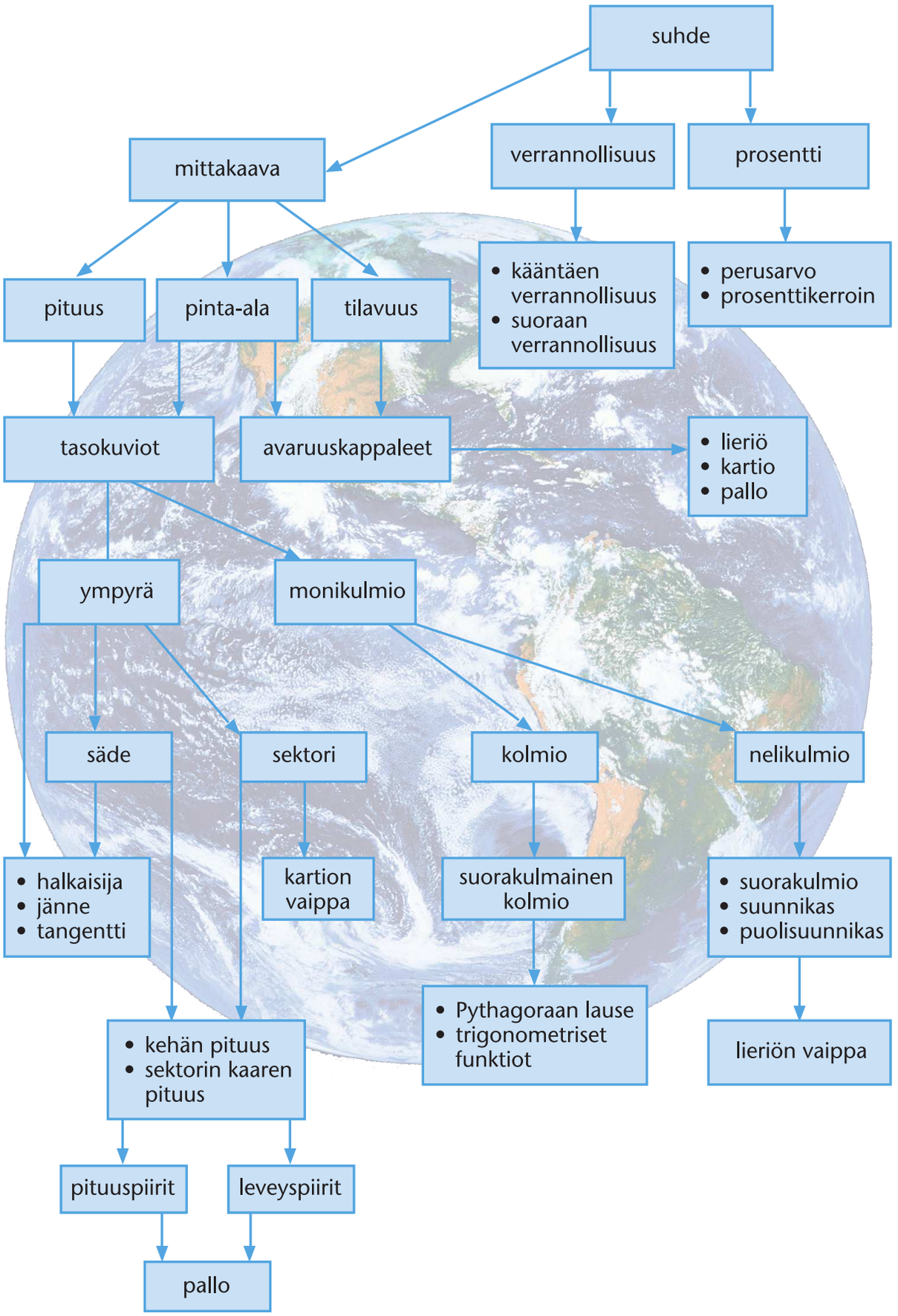
17. Murtolukuja ei pidä laskea yhteen seuraavasti: $\frac{3}{2}+\frac{a}{4}=\frac{3+a}{2+4}$.
Millä a:n arvolla kuitenkin saadaan oikea tulos? [S1993, 2a]

18. Ratkaise yhtälö $\frac{2x}{2x+3}=\frac{2x+1}{8}$. [K2000, 2]

19. Tutki, onko yhtälöillä $\frac{3}{5}x+2=1$ ja $3x^2-7x-20=0$ samoja ratkaisuja. [S2000, 1]

20. Ratkaise yhtälö $4x^2-4ax-3a^2=0$, kun $a=0{,}001$. [S2001, 4]

2 Planeetta Maa

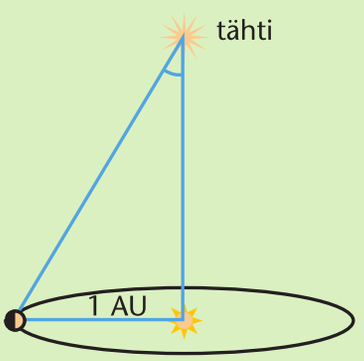


2.1 Kulmia ja pituuksia

INFO

Planeettamme Maa (Tellus) sijaitsee Linnunrata-nimisen galaksin kierteishaarassa noin 30 000 valovuoden päässä galaksin keskustasta. Linnunradan halkaisija on noin 100 000 valovuotta. Maapallolta voi havaita paljain silmin myös kolme muuta galaksia: pohjoisella pallonpuoliskolla on mahdollista nähdä Andromedan galaksi ja eteläisellä pallonpuoliskolla Suuri ja Pieni Magellanin pilvi.

Linnunratagalaksiin kuuluu satoja miljardeja tähtiä, joista yksi on oma Aurinkomme. Läheisten tähtien etäisyydet saadaan selville trigonometrisesti käyttämällä suorakulmaisen kolmion kantana Maan etäisyyttä Auringosta.



Maan keskietäisyys auringosta on noin 149,5 miljoonaa kilometriä. Tämä etäisyys on sama kuin yksi astronominen yksikkö (AU).

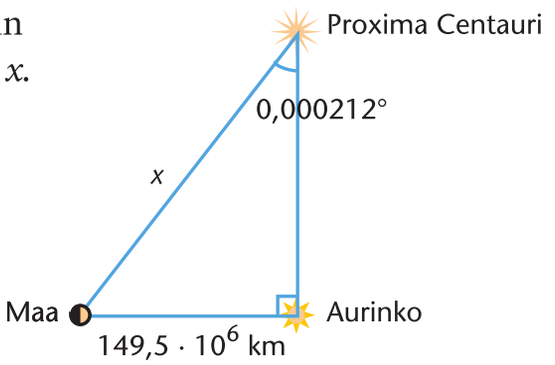
Tähtiä tarkasteltaessa mitataan kulma, jossa Maan kiertoradan (Auringon ympäri) säde näkyy kohteesta katsottuna. Käytännössä tämä tehdään mittaamalla tutkittavan kohteen sijainti taustan tähtien suhteen kuuden kuukauden välein. Kun mittauksia toistetaan riittävän monta kertaa, saadaan mittausvirhe pienenemään.

ESIMERKKI 1

Proxima Centauri on eräs Maata lähellä oleva tähti. Mittausten perusteella on todettu, että kun Proxima Centauri on suoraan Auringon yläpuolella, Maan kiertoradan säde näkyy tähdestä 0,000212 asteen kulmassa. Kuinka monen valovuoden päässä Proxima Centauri on maasta? Valon nopeus on 300 000 km/s ja Maan kiertoradan säde 149,5 miljoonaa kilometriä.

RATKAISU

Merkitään Proxima Centaurin etäisyyttä Maasta kirjaimella x.



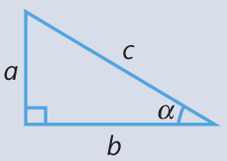
Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan yhtälö

$$\sin 0{,}000212° = \frac{149500000}{x} \quad \Big| \cdot x \neq 0$$

$$x \sin 0{,}000212° = 149500000 \quad \Big| : \sin 0{,}000212°$$

$$x = 4{,}0404... \cdot 10^{13} \quad \text{(km)}$$

Trigonometriset funktiot



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\tan\alpha = \frac{a}{b}$

Muutetaan etäisyys valovuosiksi.

Valovuosi on matka, jonka valo kulkee vuodessa.

$$\begin{aligned} 1\text{a} &= 365\text{d} = 365 \cdot 24\text{h} \\ &= 365 \cdot 24 \cdot 3600\text{s} \\ &= 31\,536\,000\text{s} \end{aligned}$$

Nopeus v

$v = \frac{s}{t}$

$s = v \cdot t$

s on matka
t on aika

Koska valon nopeus on $300000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$, valovuosi on kilometreinä

$$300000\,\frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 31\,536000\,\text{s} = 9{,}4608 \cdot 10^{12}\,\text{km}.$$

Proxima Centaurin etäisyys maasta on valovuosina

$$\frac{4{,}0404... \cdot 10^{13}\,\text{km}}{9{,}4608 \cdot 10^{12}\,\text{km}} = 4{,}2707... \approx 4{,}27.$$

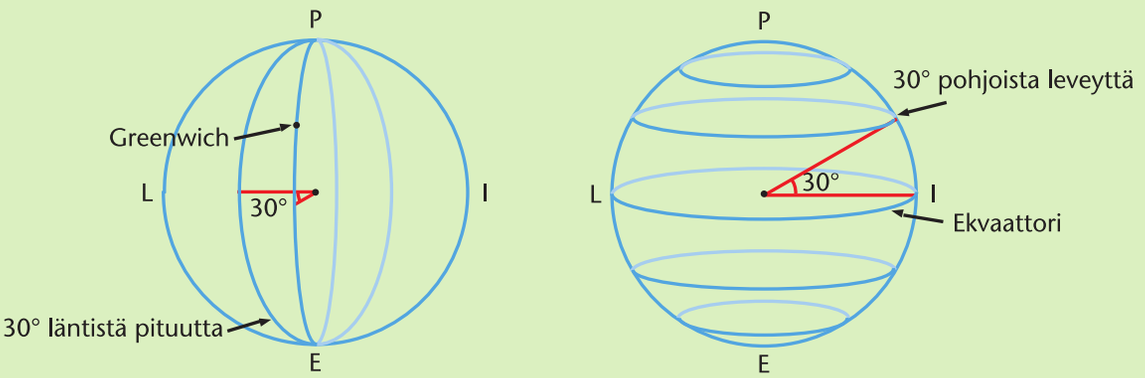
VASTAUS

Proxima Centaurin etäisyys Maasta on noin 4,27 valovuotta.

INFO

Maapallo voidaan ajatella jaettavaksi pituuspiireihin eli meridiaaneihin. Nämä ovat isoympyröiden puolikkaita, joiden päätepisteinä ovat Etelä- ja Pohjoisnapa.

Leveyspiireistä pisin on päiväntasaaja. Sen pituus on maapallon kehän pituus. Muut leveyspiirit ovat saman tason suuntaisia kuin päiväntasaaja, mutta niiden kehä on lyhyempi.



ESIMERKKI 2

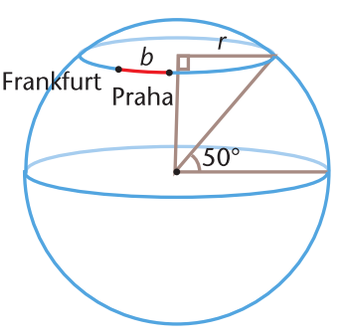
Praha ja Frankfurt sijaitsevat likimain samalla leveyspiirillä 50° pohjoista leveyttä. Pituuspiirien välinen ero on noin 6° ja Maan säde 6370 km.

a) Kuinka pitkä matka on lyhyimmillään Prahasta Frankfurtiin leveyspiiriä pitkin?

b) Jos Prahan ja Frankfurtin välille kaivettaisiin maan läpi suora tunneli, kuinka monta metriä se olisi lyhyempi kuin matka leveyspiiriä pitkin?

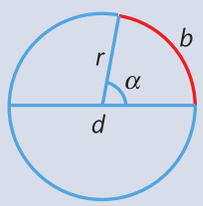
RATKAISU

a) Etäisyys saadaan 50 asteen leveyspiirin kaaren pituutena b.



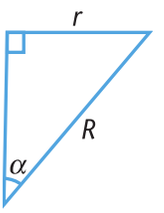
Selvitetään ensin 50 asteen leveyspiirin säde r maapallon sisään muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta.

Ympyrään liittyviä pituuksia



- halkaisija $d = 2r$
- kehän pituus $p = \pi d = 2\pi r$
- kaaren pituus $b = \frac{\alpha}{360°} 2\pi r$

- Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa R on sama kuin Maan säde eli 6370 km.
- Kulma $\alpha = 90° - 50° = 40°$.

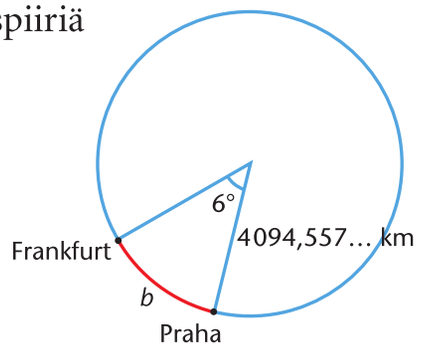


Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan yhtälö

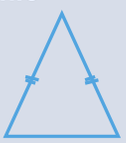
$$\sin 40° = \frac{r}{6370} \quad \big| \cdot 6370$$
$$r = 6370 \cdot \sin 40°$$
$$r = 4094{,}557... \quad \text{(km)}$$

Prahan ja Frankfurtin etäisyys leveyspiiriä pitkin on siis

$$b = \frac{6°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 4094{,}557... \text{ km}$$
$$= 428{,}781... \text{ km}$$
$$\approx 429 \text{ km}$$



Tasakylkinen kolmio



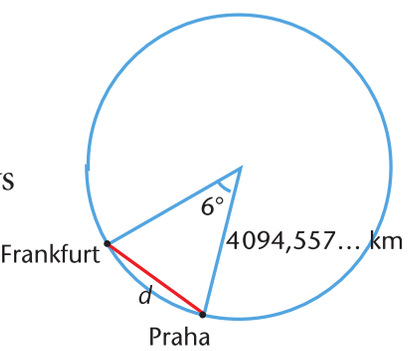
- Yhtä pitkät sivut ovat kylkiä, kolmas sivu kanta.
- Korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan.
- Kantakulmat yhtä suuret.

Tasasivuinen kolmio

- Kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja kaikki kulmat yhtä suuria (60°).
- Korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan.

b) Tarkastellaan Maan poikkileikkausta pitkin 50 asteen leveyspiiriä.

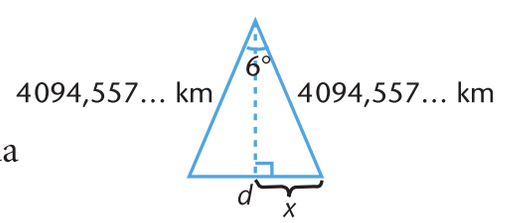
Prahan ja Frankfurtin välinen etäisyys suoraa tunnelia pitkin on d.



Tarkastellaan poikkileikkauskuvan sisään syntyvää tasakylkistä kolmiota.

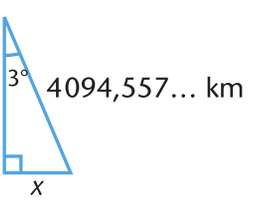
Korkeusjana puolittaa kolmion huippukulman ja kannan.

Merkitään näin syntyvän suorakulmaisen kolmion kantaa kirjaimella x. Suorakulmaisen kolmion huippukulma on $\frac{6°}{2} = 3°$.



Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan yhtälö:

$$\sin 3° = \frac{x}{4094{,}557...} \quad \big| \cdot 4094{,}557...$$
$$x = 4094{,}557... \cdot \sin 3°$$
$$x = 214{,}292... \text{ (km)}$$



Suoran tunnelin pituus $d = 2x = 2 \cdot 214{,}292\ldots \text{ km} = 428{,}585\ldots \text{ km}$.

Lasketaan, kuinka paljon lyhyempi tunneli on kuin etäisyys leveyspiiriä pitkin:

$428{,}781\ldots \text{ km} - 428{,}585\ldots \text{ km}$
$= 0{,}1958\ldots \text{ km}$
$= 195{,}8\ldots \text{ m}$
$\approx 196 \text{ m}$.

VASTAUS a) 429 km b) 196 m

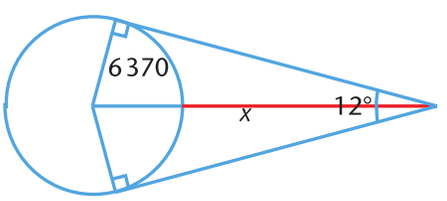
ESIMERKKI 3 Avaruusaluksesta nähdään koko maapallo 12° kulmassa. Millä etäisyydellä maapallon pinnasta avaruusalus kulkee, kun maapallon säde on 6370 km?

RATKAISU Pituuspiirit ovat isoympyröitä, joilla on sama kehän pituus kuin päiväntasaajalla. Avaruusaluksesta nähdään osa tätä ympyrän kehää eli kaari.

Ympyrän tangentti

- Tangentti sivuaa ympyrän kehää yhdessä pisteessä.
- Tangentti ja ympyrän säde ovat aina kohtisuorassa.
- Ympyrän ulkopuolisesta pisteestä voidaan piirtää kaksi tangenttia.

Merkitään aluksen etäisyyttä maapallon pinnasta kirjaimella x.



Tangenttisuorien väliin jäävä kulma on 12°.

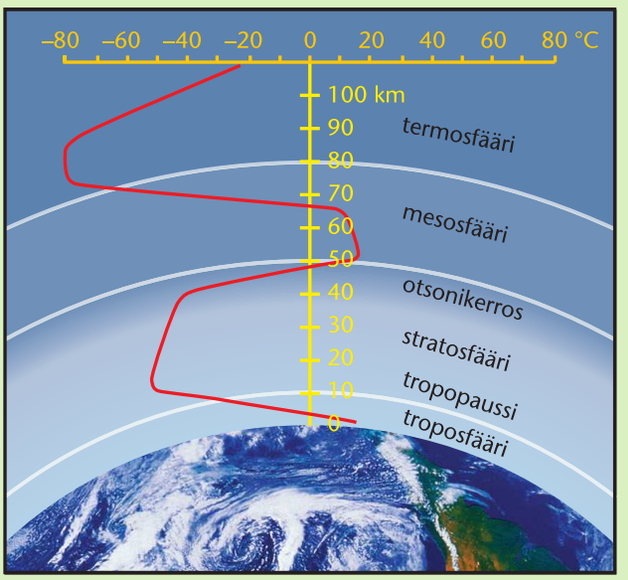
Kuvioon syntyvästä suorakulmaisesta kolmiosta saadaan yhtälö:

$$\sin 6° = \frac{6370}{6370 + x} \quad \big| \cdot (6370 + x)$$
$$\sin 6° \cdot (6370 + x) = 6370 \quad \big| : \sin 6°$$
$$6370 + x = \frac{6370}{\sin 6°}$$
$$x = \frac{6370}{\sin 6°} - 6370$$
$$x = 54570{,}3\ldots$$
$$x \approx 55500 \quad (\text{km})$$

VASTAUS Avaruusalus on 55 000 km etäisyydellä maapallon pinnasta.

INFO

Ilmakehä ympäröi maapalloa ohuena, noin sadan kilometrin paksuisena kerroksena. Ilmakehällä ei ole mitään selvää ylärajaa, vaan ylöspäin mentäessä ilman tiheys pienenee pienenemistään ja lopulta siellä vallitsee lähes täydellinen tyhjiö. Jo Mount Everestin (8850 m), maailman korkeimman vuoren, huipulla ilmakehä on liian ohutta ihmisen selviytymiseen, koska ilman tiheys siellä on vain noin yksi kolmasosa maanpinnalla olevasta tiheydestä. Ilmakehässä on pystysuunnassa selvästi toisistaan poikkeavia kerroksia eli sfäärejä.

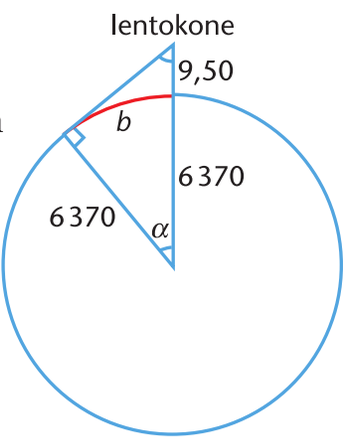


ESIMERKKI 4

Lentokone lentää troposfäärissä 9,50 km korkeudella päiväntasaajan yläpuolella länteen päin. Kuinka kauas länteen Maan pintaa pitkin lentokoneesta voi nähdä? Maapallon säde on 6370 km.

RATKAISU

Koneesta länteen katsottaessa näkyy kaaren pituus b. Tätä kaarta vastaa keskuskulma on α. Ratkaistaan tangentin avulla muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta kulma α.



$$\cos\alpha = \frac{6370}{6379{,}5}$$

$$\cos\alpha = 0{,}99851\ldots$$

Kulma saadaan laskimesta $\cos^{-1}$-näppäimen avulla.

$$\alpha = 3{,}127\ldots^\circ$$

Kaaren pituus

$$b = \frac{3{,}127\ldots^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6370 = 347{,}677\ldots \approx 348 \text{ (km)}.$$

VASTAUS

Lentokoneesta näkee 348 km länteen päin.

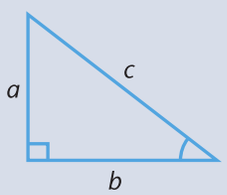
ESIMERKKI 5

Kaksi lentokonetta lähtee samasta paikasta ja niillä on sama määränpää. Ensimmäinen kone lentää pohjoiseen 150 km ja kääntyy sitten länteen ja lentää vielä 250 km. Toinen lentää suoraan määränpäähän. Sääolojen takia suoralla reitillä lentonopeus on vain 750 km/h, kun taas pidemmällä reitillä lennetään maksiminopeutta 980 km/h. Kumpi kone lentää reitin nopeammin?

RATKAISU

Lähtö- ja määräpaikat sekä lentoreitit muodostavat suorakulmaisen kolmion. Merkitään suorimman reitin pituutta kirjaimella x.

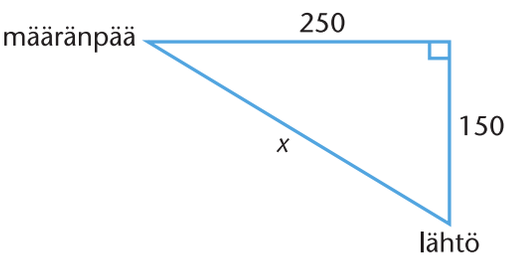
Pythagoraan lause



$a^2 + b^2 = c^2$

Pythagoraan lauseen mukaan

$$x^2 = 150^2 + 250^2$$
$$x^2 = 85000$$
$$x = \pm\sqrt{85000}$$
$$x = \pm 291{,}54...$$



Pituus on aina positiivinen, joten $x = 291{,}54\ldots$ (km).

Lasketaan lentoajat matkan ja nopeuden avulla. Pidempi reitti on yhteensä 400 km. Aikaa siihen kuluu

t = aika
s = matka
v = nopeus

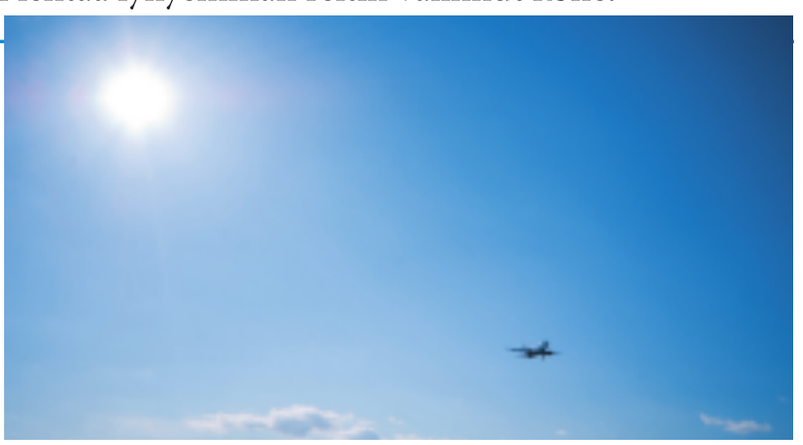
$$t = \frac{s}{v} = \frac{400\ \text{km}}{980\ \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}408...\,\text{h} \approx 24\ \text{min}.$$

Lyhyempään reittiin aikaa kuluu

$$t = \frac{s}{v} = \frac{291{,}54...\ \text{km}}{750\ \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}388...\,\text{h} \approx 23\,\text{min}.$$

VASTAUS

Nopeammin lentää lyhyemmän reitin valinnut kone.



Tehtäviä

E 1

21. Katsoja näkee pilvien välisen salaman välähdyksen 25 asteen kulmassa horisontin yläpuolella ja kuulee jyrähdyksen 35 sekunnin kuluttua salamaniskusta. Kuinka korkealla salamanisku tapahtui? Kuinka etäällä katsojasta oli paikka, jonka yläpuolella salama iski? Äänen nopeus on 340 m/s. Maanpinta oletetaan tasoksi. [S2002, 6]

E 2

22. Rooman sijainti on 12° itäistä pituutta ja 42° pohjoista leveyttä. Göteborg sijaitsee samalla pituuspiirillä mutta leveysasteella 58° pohjoista leveyttä.
    a) Laske Rooman ja Göteborgin välinen lyhin etäisyys maan pintaa pitkin.
    b) New York sijaitsee Rooman kanssa samalla leveyspiirillä mutta pituusasteella 74° läntistä pituutta. Kuinka pitkä matka on Roomasta New Yorkiin, jos matkustettaisiin koko ajan länteen? Maan säde on 6370 km.

E 3

23. Avaruusalus lentää suoraan päiväntasaajan yläpuolella. Aluksesta nähdään 45 % päiväntasaajasta. Laske avaruusaluksen etäisyys Maan pinnasta, kun maapallon säde on 6370 km.

E 4

24. Kuinka kauas maanpintaa pitkin voidaan nähdä Eiffel-tornin huipulta, kun tornin korkeus on 309,63 m? Maapallon säde on noin 6370 km.

E 5

25. Helsinki-Vantaan lentoasemalta lähtevä reittikone saavutti 4900 jalan korkeuden Kalajärven kohdalla ja tästä vaakasuunnassa mitaten 5,0 km:n päässä 6000 jalan korkeuden. Koneen nopeus tällä välillä maahan nähden oli 285 solmua. Kuinka suuressa kulmassa vaakatasoon nähden kone nousi? Kuinka kauan kyseisen välin lento kesti? (1 jalka = 0,305 m, 1 solmu = 1,852 km/h)
[K2004, 11]

26. Matkapuhelinmasto sijaitsee mäellä, joka kohoaa 32 metriä läheisen järven pintaa korkeammalle. Maston korkeus on 120 metriä. Missä kulmassa (vaakasuoraan tasoon nähden) järven vastakkaisella rannalla mastosta 4,5 kilometrin päässä oleva katsoja näkee maston huipussa olevan punaisen valon? Vastaus 0,1 asteen tarkkuudella. [K2002, 6]

27. Kaksi henkilöä seisoo radiomaston vastakkaisilla puolilla siten, että toinen on radiomastosta suoraan pohjoiseen, toinen etelään. Pohjoisessa oleva henkilö näkee maston huipun 6,70° kulmasta ja etelässä seisova henkilö 13,7° kulmassa. Mikä on henkilöiden välinen etäisyys, kun maston korkeus on 132 m?

28. Puun varjon pituus (itä–länsisuunnassa) mitattiin kahdella eri hetkellä saman päivän aikana. Ensimmäisellä mittaushetkellä auringon säteet muodostivat 29° kulman maanpinnan kanssa. Myöhemmin säteet muodostivat 36° kulman, mutta varjo oli 6,8 m lyhyempi. Laske näiden tietojen avulla puun pituus.

29. Pietari ja Aleksandria sijaitsevat samalla pituuspiirillä, 30° itäistä pituutta. Lentokone lentää matkan keskinopeudella 820 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kuinka kauan matkaan kuluu aikaa, kun Pietari sijaitsee 60. leveyspiirillä pohjoista leveyttä ja Aleksandria 30. leveyspiirillä pohjoista leveyttä? Maapallon säde on 6370 km.

30. Suoraan päiväntasaajan yläpuolella 1,2 kilometrin korkeudella oleva laskuvarjohyppääjä katsoo suoraan alaspäin. Kuinka monta prosenttia hän näkee päiväntasaajasta, kun päiväntasaajan pituus on 40 000 km?

31. Jaakko katsoo edessään olevaa pyöreää mainospylvästä, jonka halkaisija on 1,5 m. Pylvääseen on kiinnitetty 1,0 metrin levyinen mainos, jonka Jaakko juuri ja juuri näkee kokonaisuudessaan. Missä kulmassa Jaakko näkee koko mainoksen?

32. Bengtskärin majakka on Pohjoismaiden korkein majakka. Se kohoaa 52 metriä merenpinnan yläpuolelle. Turisti katsoo majakan huipulta merelle. Hän näkee horisontissa juuri ja juuri laivan. Kuinka kaukana laiva on majakasta, kun maapallon säde on 6370 km?

33. Tasakylkisen kolmion muotoisen juustosiivun kylkien pituudet ovat 7,2 cm ja kannan pituus 5,8 cm. Laske juustosiivun korkeus sekä kulmien suuruudet.

34. Kilpapyöräilijä ajaa 4825 m matkan velodromin ympyrän muotoisella sisäradalla. Etäisyys sisäradalta velodromin keskelle on 48 m. Mikä on pyöräilijän keskimääräinen kierrosnopeus, kun koko matkaan aikaa kuluu 7 min 42 s?

35. Kaksi 14 mm paksua lautaa liitetään päällekkäin yhteen 30 mm pitkällä naulalla. Naulan tulee jäädä koko pituudeltaan lautojen sisään, joten naula lyödään hieman vinoon. Mikä on naulan
a) pienin b) suurin mahdollinen kaltevuuskulma, kun naulan tulee yltää alempaan lautaan vähintään 8 mm:n syvyyteen mutta ei kuitenkaan laudan läpi? Vastaukset asteen tarkkuudella.
[S2004, 5]

36. Urheilukentän juoksuradan sisäpuolinen kenttä koostuu suorakulmiosta ja sen päissä olevista puoliympyröistä, joiden säde on 36,00 m. Kuinka pitkät ovat juoksuradan suorat osat, kun juoksuradan koko pituus on tasan 400 metriä radan sisäreunaa pitkin mitattuna? Juoksuradalla on yhteensä kahdeksan 122 cm:n levyistä rinnakkaisrataa. Kuinka monta metriä uloin, kahdeksas rata on sisärataa pidempi ratojen sisäreunoja pitkin mitattuna? Anna vastaus 0,01 metrin tarkkuudella. Kuinka monta prosenttia tämä ero on? [S2002, 4]

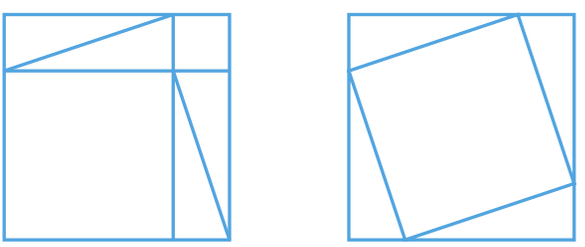
37. Tyynessä järvessä uiva kesälomailija on tarkkaillut veden pintaa ja väittää näkevänsä maapallon kaareutumisen järven pinnan kohoumana. Oletetaan, että kaareutuminen on mahdollista havaita veden pinnasta, jos pinta on uimarista vastakkaiselle rannalle ulottuvan suoran linjan keskikohdalla vähintään 20 cm linjaa ylempänä. Kuinka kaukana uimarista vastarannan on silloin vähintään oltava? Maapallon ympärysmitta on 40 000 km.
[S2004, 9]

38. Ajatellaan, että Helsingistä Brysseliin kaivetaan liikennetunneli, joka yhdistää kaupungit suoraviivaisesti maapallon jännettä pitkin. Miten syvällä on tunnelin syvin kohta? Kuinka monen asteen kaltevuudessa tunneliin ajetaan sen kummassakin päätepisteessä? Maapallon säde on 6370 km. Helsingin ja Brysselin välinen lyhin etäisyys maapallon pintaa pitkin mitattuna on 1650 km. [S2001, 10]

39. a) Kuinka suuret ovat kolmion kulmat, kun niiden suhde on 5:11:20?
    b) Kuinka suuret ovat suorakulmaisen kolmion sivut, kun niiden suhde on 3:4:5 ja kolmion ala on $13\frac{1}{2}$? [K2003, 3]

40. Neliöpohjaisen suoran pyramidin korkeus on 21 ja pohjasärmän pituus $20\sqrt{2}$. Laske pyramidin sivusärmän pituus. Kuinka suuren kulman sivusärmä muodostaa pyramidin pohjan kanssa? [K2003, 7]

41. Jäljennä koepaperiisi (riittävän isoon kokoon) oheinen kuvio. Lisää siihen tarvittavat merkinnät ja perustele sen avulla Pythagoraan lauseen voimassaolo. [K2002, 13]

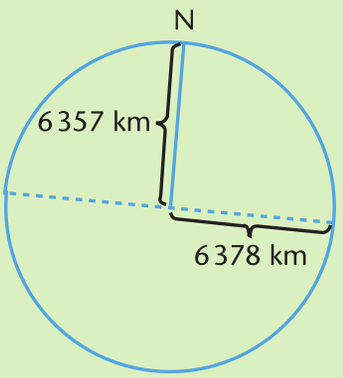


2.2 Pinta-aloja ja tilavuuksia

INFO

Maa pyörii akselinsa ympäri. Pyörimisliikkeen seurauksena painovoiman vaikutus päiväntasaajalla on hieman pienempi kuin painovoiman vaikutus navoilla. Tämän vuoksi Maa on navoiltaan litistynyt.

Maan säde napojen kohdalla on noin 6357 km, kun säde päiväntasaajalla on noin 6378 km. Keskimäärin maapallon säde on noin 6370 km. Tätä säteen arvoa käytetään yleensä tilanteissa, joissa Maata mallinnetaan pallon avulla.



ESIMERKKI 1

Vielä keskiajalla ajateltiin, että Maa on litteä kuin pannukakku.
a) Mikä olisi tämän mallin mukaan Maan pinta-ala?
b) Mikä on Maan todellinen pinta-ala?
c) Laske pallon muotoisen maapallon keskitiheys (kg/m^3), kun maapallon massa on likimain $5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg.

Maapallon kehän pituus on 40 000 km. Anna vastaukset kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

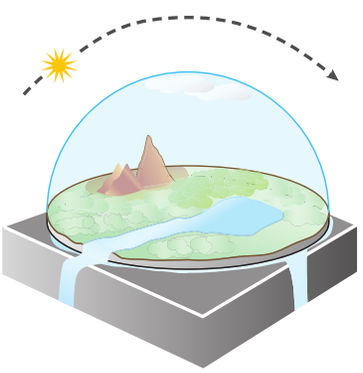
RATKAISU

a) Jos Maa ajatellaan litteäksi, sen ala lasketaan ympyrän alan kaavalla. Siihen tarvitaan säde r.

Ympyrän ala
$A_{\text{ympyrä}} = \pi r^2$

Pallon ala
$A_{\text{pallo}} = 4\pi r^2$

$$r = \frac{40000 \text{ km}}{2\pi} = 6366{,}19... \text{ km}$$



Tällöin kysytty ympyrän ala on

$$\begin{aligned} A_{\text{maa}} &= \pi r^2 \\ &= \pi \cdot (6366{,}19... \text{ km})^2 \\ &= 1{,}273... \cdot 10^8 \text{ km}^2 \\ &\approx 1{,}27 \cdot 10^8 \text{ km}^2 \end{aligned}$$

b) Maapallon todellinen ala on

$$A_{\text{pallo}} = 4\pi r^2$$
$$= 4\pi \cdot (6366{,}19\ldots\,\text{km})^2$$
$$= 5{,}092\ldots \cdot 10^8\ \text{km}^2 \approx 5{,}09 \cdot 10^8\ \text{km}^2$$

c) Tiheys ρ on massan m ja tilavuuden V osamäärä eli $\rho = \frac{m}{V}$. Lasketaan ensin maapallon tilavuus.

Pallon tilavuus

$V_{\text{pallo}} = \frac{4\pi r^3}{3}$

Tiheys

$\rho = \frac{m}{V}$

m = massa
V = tilavuus

$$V = \frac{4\pi \cdot (6366{,}19\ldots\,\text{km})^3}{3} = 1{,}0807\ldots \cdot 10^{12}\ \text{km}^3 = 1{,}0807\ldots \cdot 10^{21}\ \text{m}^3$$

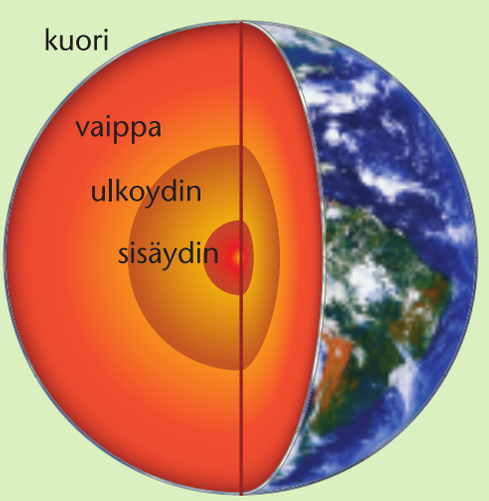
Tällöin keskitiheys on

$$\rho = \frac{5{,}974 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{1{,}0807\ldots \cdot 10^{21}\ \text{m}^3}$$
$$= 5527{,}59\ldots\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \approx 5530\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

VASTAUS a) $1{,}27 \cdot 10^8\ \text{km}^2$ b) $5{,}09 \cdot 10^8\ \text{km}^2$ c) $5530\ \text{kg/m}^3$

INFO

Maapallo jaetaan kemiallisen koostumuksen mukaan kolmeen kehään. Uloimpana kehänä on kiinteä kuori, jonka paksuus (30–70 km) on suhteessa sama kuin omenassa kuoren paksuus. Kuoren alla on sulasta kiviaineksesta koostuva vaippa ja sisimpänä rautapitoinen ydin. Ydin jaetaan sulaan ulkoytimeen ja kiinteään sisäytimeen.



Maan sisäosien tutkimukset eivät perustu suoriin havaintoihin, sillä millään havaintolaitteella ei pystytä tunkeutumaan riittävän syvälle Maan sisuksiin. Maan sisäosien tutkimuksessa hyödynnetäänkin esimerkiksi maanjäristysaaltoja ja maahan pudonneita meteoriitteja.

ESIMERKKI 2

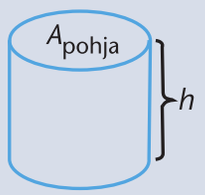
Seikkailuelokuvassa ”Ytimessä” tiedemiesryhmä porautuu Maan keskuksessa sijaitsevaan nestemäisestä nikkeli-rautaseoksesta koostuvaan ytimeen käynnistämään Maan pyörimisliikkeen uudelleen.

a) Jos Maan kiinteään kuoreen porattaisiin tällä tavoin pyöreä, halkaisijaltaan 3,0 m suuruinen käytävä, joka ulottuisi 35 km syvyydessä alkavaan nestemäiseen kiviainekseen saakka, mikä olisi syntyneen käytävän tilavuus?

b) Kuinka suuri olisi syntyneen käytävän seinäpinta-ala? Oletetaan, että poraaminen aloitettaisiin merenpinnan tasolta ja onkalo olisi kohtisuorassa maanpintaa vastaan.

RATKAISU

Lieriön tilavuus



$V = A_{pohja} \cdot h$

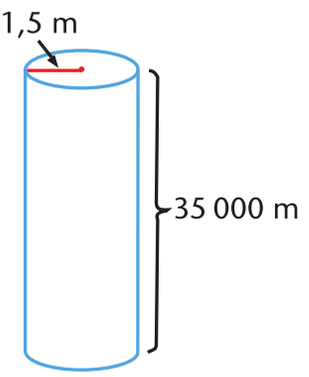
Lieriön vaipan ala

$A_{vaippa} = p_{pohja} \cdot h$

a) Muodostuva onkalo on suora ympyrälieriö, jonka pohjaympyrän säde on puolet reiän halkaisijasta eli 1,5 m.

Lieriön korkeus on 35 km = 35 000 m.
Tällöin

$$\begin{aligned} V &= A_{pohja} \cdot h \\ &= \pi \cdot (1{,}5\ \text{m})^2 \cdot 35000\ \text{m} \\ &= 247\,400{,}42...\ \text{m}^3 \\ &\approx 250000\ \text{m}^3 \end{aligned}$$



b) Lasketaan lieriön vaipan ala. Käytävän ”pohjaympyrän” kehän pituus $p = \pi d = \pi \cdot 3{,}0$ m.

Vaipan ala

$$\begin{aligned} A_{vaippa} &= \pi \cdot 3{,}0\,\text{m} \cdot 35000\text{m} = 329867{,}2...\ \text{m}^2 \\ &= 32{,}98672...\,\text{ha} \\ &\approx 33\,\text{ha} \end{aligned}$$

VASTAUS

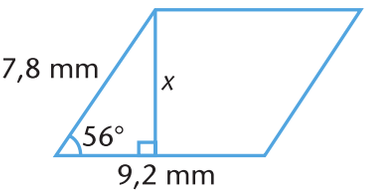
a) 250 000 m^3 b) 33 ha

ESIMERKKI 3

Maaperässä timantteja syntyy 2500 miljoonan vuoden ikäisten vakaiden kallioperäalueiden alla noin 150–200 kilometrin syvyydessä. Jotta timantti voisi syntyä, tarvitaan todella kova paine ja lämpötila. Suoran pyramidin muotoisen timantin pohjana on suunnikas, jonka erimittaisten sivujen pituudet ovat 9,2 mm ja 7,8 mm. Sivujen välinen kulma on 56°. Laske timantin tilavuus, kun sen korkeus on 3,5 mm.

RATKAISU

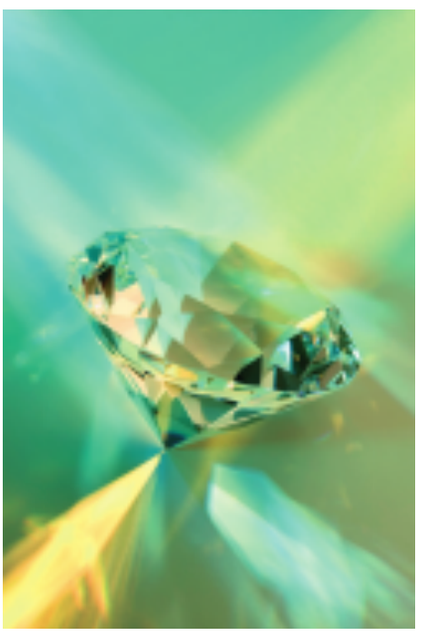
Lasketaan ensin timantin pohjan pinta-ala. Pohjasuunnikkaan korkeus x saadaan suorakulmaisesta kolmiosta.



$$\sin 56° = \frac{x}{7{,}8} \quad \big| \cdot 7{,}8$$

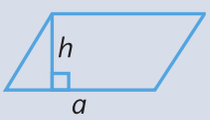
$$x = 7{,}8 \cdot \sin 56°$$

$$x = 6{,}46... \quad \text{(mm)}$$



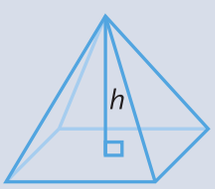
Suunnikkaan ala

$A = ah$



Pyramidin tilavuus

$$V = \frac{A_{\text{pohja}} \cdot h}{3}$$



Suunnikkaan pinta-ala on

$$A_{\text{suunnikas}} = 9{,}2\,\text{mm} \cdot 6{,}46...\,\text{mm}$$

$$= 59{,}49...\,\text{mm}^2$$

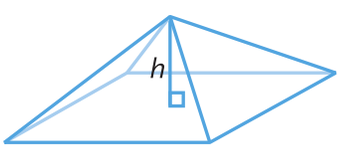
Pyramidin tilavuus

$$V_{\text{pyramidi}} = \frac{A_{\text{suunnikas}} \cdot h}{3}$$

$$= \frac{59{,}49...\,\text{mm}^2 \cdot 3{,}5\,\text{mm}}{3}$$

$$= 69{,}407...\,\text{mm}^3$$

$$\approx 69\,\text{mm}^3$$

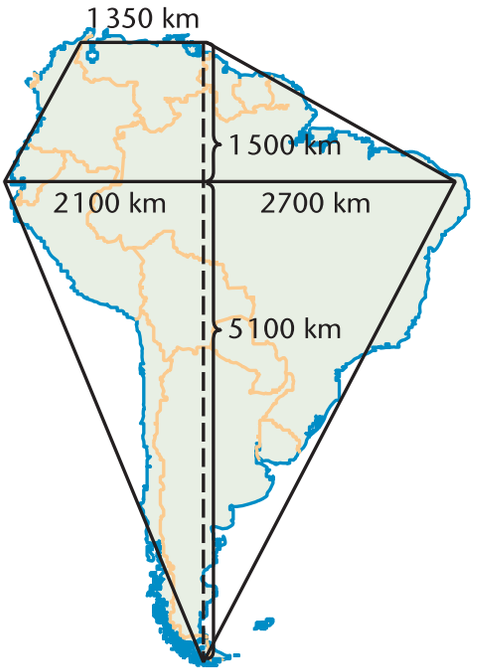


VASTAUS

Timantin tilavuus on 69 mm^3.

ESIMERKKI 4

Etelä-Amerikan voidaan ajatella muodostuvan puolisuunnikkaasta ja kolmiosta kuvan mukaisesti. Laske kuvan avulla Etelä-Amerikan ala. Kuinka monta prosenttia tämä arvio poikkeaa Etelä-Amerikan todellisesta alasta, joka on 17,8 miljoonaa neliökilometriä?

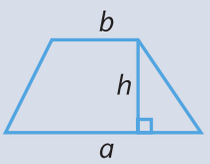


RATKAISU

Puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 1350 km ja 4800 km, ja puolisuunnikkaan korkeus on 1500 km.

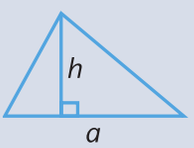
Puolisuunnikkaan ala

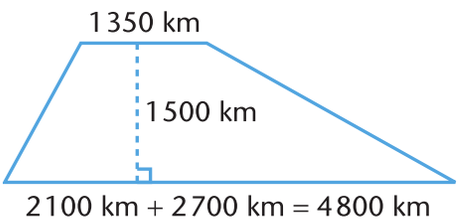
$$A = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



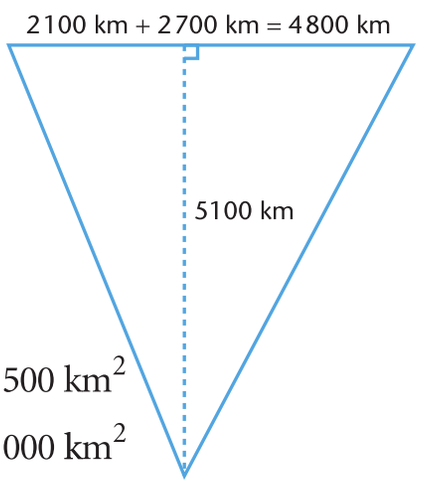
Kolmion ala

$$A = \frac{ah}{2}$$





$$A_{\text{puolisuunnikas}} = 1500\,\text{km} \cdot \left(\frac{1350\,\text{km} + 4800\,\text{km}}{2} \right) = 4\,612\,500\,\text{km}^2$$



$$A_{\text{kolmio}} = \frac{4800\,\text{km} \cdot 5100\,\text{km}}{2} = 12\,240\,000\,\text{km}^2$$

Kuvioiden yhteenlaskettu ala on

$$4\,612\,500\,\text{km}^2 + 12\,240\,000\,\text{km}^2 = 16\,852\,500\,\text{km}^2 \approx 16\,900\,000\,\text{km}^2$$

Verrataan vielä todellisen alan ja arvion erotusta todelliseen alaan.

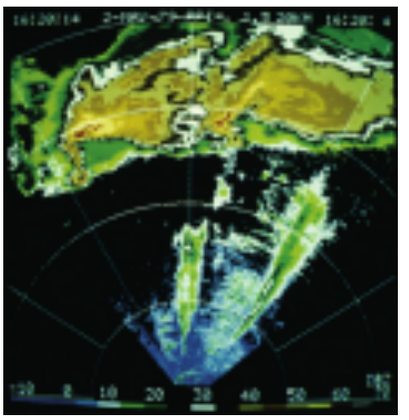
$$\frac{17\,800\,000 - 16\,852\,500}{17\,800\,000} = 0{,}05323\ldots \approx 5{,}3\,\%.$$

VASTAUS

Kuvasta arvioituna ala on 16,9 miljoonaa neliökilometriä. Se poikkeaa todellisesta alasta 5,3 %.

ESIMERKKI 5

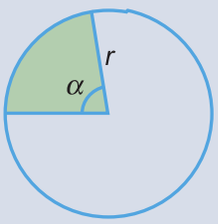
Laivan tutkan valvontasektorin keskuskulma on 52°. Tutkakuvan yläreunassa näkyy saari, joka leveydeltään mahtuu juuri ja juuri tutkan valvontasektoriin. Laske saaren suurin leveys, kun tutkan pyyhkäisemän sektorin muotoisen alueen pinta-ala on 440 km^2.



RATKAISU

Sektorin ala

$$A_{\text{sektori}} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$$



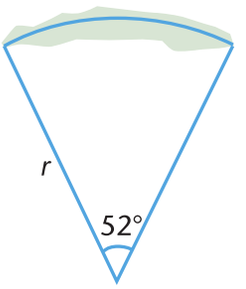
Merkitään tutkan valvontasektorin sädettä kirjaimella r. Koska sektorin pinta-ala on 440 km^2, saadaan yhtälö

$$\frac{52°}{360°} \cdot \pi r^2 = 440 \qquad \big| \cdot 360$$

$$52\pi r^2 = 158\,400 \qquad \big| : (52\pi)$$

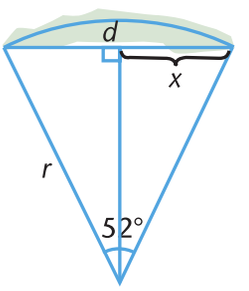
$$r^2 = 969{,}62...$$

$$r = \pm 31{,}13... \ \text{(km)}$$



Sektorin säde on aina positiivinen, joten $r = 31{,}13...$ km.

Merkitään saaren leveyttä kirjaimella d.



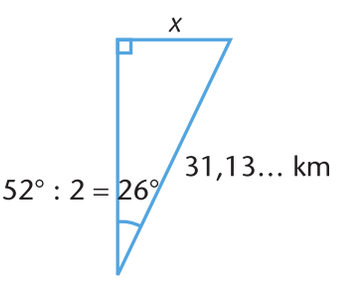
Jaetaan sektorin sisälle muodostuva tasakylkinen kolmio korkeusjanalla kahdeksi samanlaiseksi suorakulmaiseksi kolmioksi.

Korkeusjana puolittaa huippukulman.

Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan yhtälö:

$$\sin 26° = \frac{x}{31{,}13...} \qquad \big| \cdot 31{,}13...$$

$$x = 13{,}650... \ \text{(km)}$$



Saaren leveys on $d = 2x = 2 \cdot 13{,}650...$ km $= 27{,}300...$ km ≈ 27 km.

VASTAUS

Saaren leveys on noin 27 km.

ESIMERKKI 6

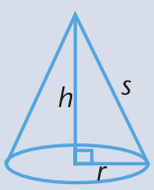
Norjassa sijaitseva tunturi, jonka korkeus on 1,55 km, on likimain suoran ympyräkartion muotoinen. Merenpinnan tasolla tunturia kiertää polku. Retkikunta kiertää tunturin ympäri 39 tunnissa, kun ryhmän keskinopeus on 2,4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Jos koko tunturi louhittaisiin soraksi, kuinka monta kuorma-autolastillista soraa siitä saataisiin, kun yhteen lastiin mahtuu 18 m^3?

b) Jos tunturi istutettaisiin täyteen puun taimia, kuinka monta tainta tarvittaisiin, kun puiden istutustiheys on 1 taimi/5 m^2?

RATKAISU

Ympyräkartion tilavuus



$$V = \frac{A_{\text{pohja}} \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Ympyräkartion vaipan ala

$$A_{\text{vaippa}} = \pi r s$$

a) Kartion tilavuuden laskemiseksi on tiedettävä sen pohjaympyrän ala. Ympyrän kehä voidaan laskea ryhmän nopeuden v ja matkaan s käytetyn ajan t avulla.

$$v = 2{,}4\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \text{ ja } t = 39\ \text{h}$$

Koska $v = \frac{s}{t}$, niin $s = v \cdot t = 2{,}4\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 39\ \text{h} = 93{,}7\ \text{km}$.

Pohjaympyrän kehä on siis 93,6 km. Tästä saadaan säde r.

$$r = \frac{p}{2\pi} = \frac{93{,}6\ \text{km}}{2\pi} = 14{,}89...\ \text{km}$$

Kartion tilavuus V on tällöin

$$V = \frac{A_{\text{pohja}} \cdot h}{3}$$

$$= \frac{\pi \cdot (14{,}89...\ \text{km}^2) \cdot 1{,}55\ \text{km}}{3}$$

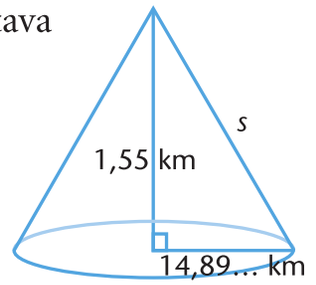
$$= 360{,}207...\ \text{km}^3$$

$$= 3{,}602... \cdot 10^{11}\ \text{m}^3$$

Tästä määrästä saataisiin soraa kuorma-autolastillisina

$$\frac{3{,}602... \cdot 10^{11}\ \text{m}^3}{18\ \text{m}^3} = 2{,}001... \cdot 10^{10} \approx 2{,}0 \cdot 10^{10} \text{ kappaletta.}$$

b) Taimien määrän selvittämiseksi on laskettava tunturin vaipan ala.



Lasketaan sivujanan s pituus suorakulmaisesta kolmiosta.

$$s^2 = 1{,}55^2 + 14{,}89...^2$$
$$s^2 = 224{,}32...$$
$$s = \pm\sqrt{224{,}32...}$$
$$s = \pm 14{,}977...$$

Koska pituus on aina positiivinen, $s = 14{,}977...$ km.

Tunturin vaipan ala

$$A_{\text{vaippa}} = \pi rs$$
$$= \pi \cdot 14{,}89... \text{ km} \cdot 14{,}977... \text{ km}$$
$$= 700{,}938... \text{ km}^2$$

Muutetaan pinta-ala neliömetreiksi.

$$700{,}9387242... \text{ km}^2 = 700\,938\,724{,}2... \text{ m}^2$$

Yksi taimi vaatii tilaa 5 m^2, joten taimia tarvitaan

$$\frac{700\,938\,724{,}2... \text{ m}^2}{5 \text{ m}^2} = 140\,187\,744{,}8...$$
$$\approx 140\,000\,000 \text{ kappaletta.}$$

VASTAUS

a) $2{,}0 \cdot 10^{10}$ kuorma-autolastillista soraa
b) 140 miljoonaa tainta

Tehtäviä

E 1

42. Miesten kuulantyönnössä käyttämä kuula painaa keskimäärin 7,260 kg. Kuulan halkaisija on noin 12 cm.
a) Laske kuulan tiheys.
b) Naisten kuula valmistetaan samasta materiaalista. Laske naisten kuulan halkaisija, kun naisten kuula painaa noin 4,0 kg.

E 2

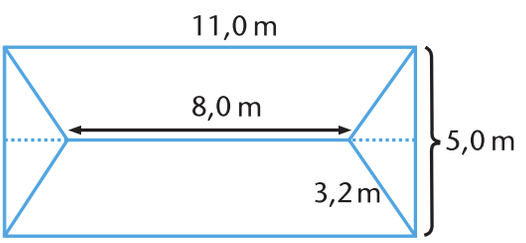
43. Suoran ympyrälieriön muotoisessa purkissa on hernekeittoa. Keiton massa on 435 g. Keiton tiheys on 0,940 $\frac{\text{kg}}{1}$. Keittoa on 95 % purkin tilavuudesta.
a) Laske purkin tilavuus kuutiosenttimetreinä.
b) Laske purkin pohjan säde, kun purkin korkeus on 11 cm.

E 3

44. Suunnikkaan muotoisista koristelaatan palasista kootaan kuvioita kylpyhuoneen seinälle. Yhteen kuvioon kuuluu 20 koristelaattaa. Laske yhden koristekuvion pinta-ala, kun suunnikkaan muotoisen laatan erimittaiset sivut ovat 35 mm ja 20 mm sekä näiden välinen kulma 145°.

E 4

45. Talon katto koostuu kuvan mukaisesti tasakylkisistä puolisuunnikkaista ja kolmioista. Laske katon pinta-ala.



E 5

46. Pahvista leikataan ympyräsektorin muotoinen pala, joka taitetaan vappuhatuksi. Sektorin säde on 30 cm. Hattu tehdään henkilölle, jonka pään ympärysmitta on 58 cm. Laske, kuinka paljon pahvia vähintään tarvitaan hatun valmistamiseen.

E 6

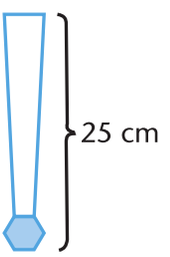
47. Amerikkalaisessa museossa on aito sioux wigwam, joka on suoran ympyräkartion muotoinen. Teltan tilavuus on 6,8 m^3 ja teltan korkeus 2,0 m. Kuinka paljon puhvelinnahkaa teltan valmistamiseen on käytetty? Teltassa on maalattia. Teltan huipussa olevan savuaukon alaa ei tarvitse ottaa huomioon.

48. Puolipallon muotoisen kakkukuvun tilavuus on 3,5 litraa. Kuinka korkea ympyrälieriön muotoinen kakku kakkukuvun alle mahtuu, kun kakku asetetaan keskelle kupua ja kakun pohjan halkaisija on 18 cm?

49. Keretin kaivoskuilun syvyys on 408 m. Kaivoksen henkilöhissin nopeus on 6,5 m/s ja maksimikuorma 29 henkilöä.
    a) Kuinka kauan kestää kaivoksen 205 miehen siirtyminen kuilun pohjalle?
    b) Kupariharkon koko on 20 cm × 10 cm × 5 cm. Kuinka paljon kuparia tarvitaan kymmenen harkon valmistamiseen, kun kuparin tiheys on 8,96 kg/dm^3?

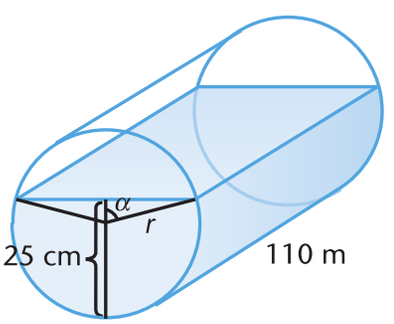
50. Puupelletti on lieriömäinen kappale, joka on puristettu kokoon koneellisesti hienojakoisesta puuaineksesta. Pelletin leveys on 8–12 mm ja pituus vaihtelee 5–20 mm välillä. Tarkastellaan erää, jossa on miljoona pellettiä. Pelletit on valmistettu minimimittojen mukaan. Kuinka monta prosenttia vähemmän ne vievät tilaa siihen verrattuna, jos ne olisi valmistettu maksimimittojen mukaan?

51. Viereisessä kuvassa on maljakon poikkileikkaus. Maljakon jalkaosan poikkileikkaus on säännöllinen kuusikulmio, jonka sivun pituus on 2,1 cm. Maljakon suun leveys on yhtä suuri kuin jalkaosan leveys. Laske koko poikkileikkauksen pinta-ala, kun koko maljakon korkeus on 25 cm.



52. Puolisuunnikkaan kahden yhdensuuntaisen sivun välinen etäisyys on 3,20 cm. Yhdensuuntaisista sivuista toinen on 5,00 cm lyhyempi kuin toinen. Laske näiden sivujen pituudet, kun puolisuunnikkaan ala on 21,44 cm^2.

53. Suoran ympyrälieriön muotoisen tynnyrin vetoisuus on 150 l ja sen sivun pituus on 1,10 m. Kyljellään makaavassa tynnyrissä on 25 cm öljyä.
    a) Laske tynnyrin säde r.
    b) Laske kulma α.
    c) Laske tynnyrissä olevan öljyn tilavuus.
    d) Laske öljyn massa, kun sen tiheys on 855 kg/m^3.



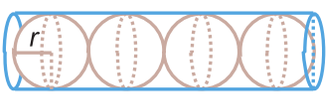
54. Lasista valmistetaan suoran neliöpohjaisen pyramidin muotoinen koriste-esine. Koriste-esineen pohjan sivun pituus on 12 cm ja korkeus 8,0 cm. Laske lasiesineen tilavuus ja kokonaispinta-ala.

55. Kolmion muotoisen viheralueen kaksi lyhintä sivua ovat 70,0 m ja 86,5 m. Jälkimmäisen vastainen kulma on 35,0°. Laske viheralueen muiden kulmien suuruudet ja alueen pinta-ala. Piirrä kuvio. [S2003, 6]

56. Ympyrän pinta-ala on 12 cm^2. Mikä on ympyrän ympäri piirretyn neliön ala? Entä ympyrän sisään piirretyn neliön ala? Anna vastaus neliösenttimetreinä kahden desimaalin tarkkuudella. [K2002, 2]

57. Tuoreen koivutukin pituus on neljä metriä ja sen keskimääräinen halkaisija puoli metriä. Mikä on tukin massa, kun tuoreen koivun tiheys on noin 0,9 kg/dm^3? [S2001, 2]

58. Täysinäisessä tiiviisti pakatussa ympyrälieriön muotoisessa säilytyskotelossa on neljä tennispalloa. Kuinka suuri osa pallojen tilavuus on kotelon tilavuudesta? [K2001, 3]



59. Strategiapelissä rakennetaan uudelle planeetalle makean veden säiliötä. Säiliö on ympyräpohjainen lieriö, jonka korkeus on 320 m ja pohjan halkaisija 2000 m. Säiliöstä haihtuu vettä keskimäärin 100 litraa minuutissa. Kuinka monta planeetan vuotta säiliössä riittäisi vettä, ennen kuin täysi säiliö pelkästään haihtumisen vuoksi olisi tyhjentynyt? Planeetan vuosi on $3 \cdot 10^7$ sekuntia. [K2003, 5]

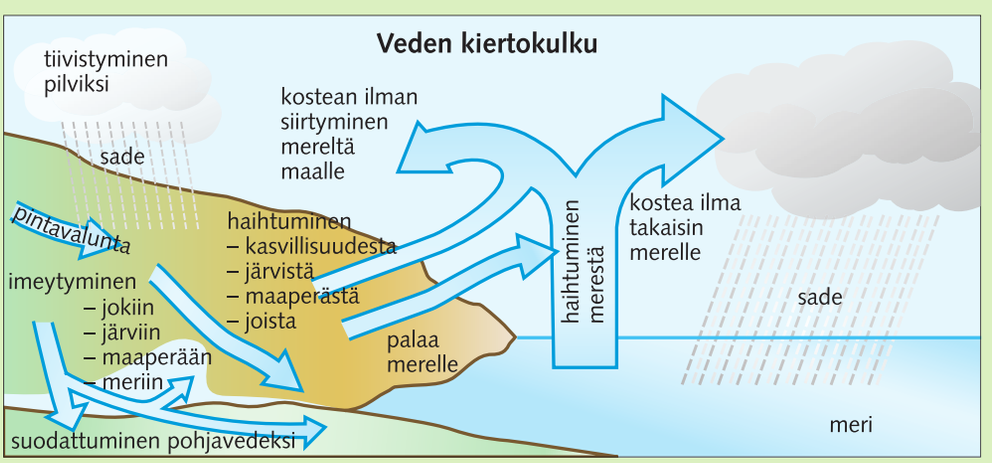
60. Arkhimedeen lain mukaan vedessä kelluvan kappaleen massa on sama kuin sen syrjäyttämän vesimäärän massa. Pallon muotoinen ontto rautapoiju, joka painaa 47 kg, uppoaa puoleksi veteen. Kuinka paksusta rautalevystä se on valmistettu? Veden tiheys on 1,0 kg/dm^3 ja raudan 7,7 kg/dm^3. [K2002, 10]

2.3 Prosentit, suhde ja verrannollisuus

INFO

Maapallon vesikehä eli hydrosfääri muodostuu kaikesta planeetalta löytyvästä vedestä. Tähän kuuluvat esimerkiksi meret, järvet, pohjavedet, jäätiköt ja ilmakehään sitoutunut vesi. Maa on aurinkokuntamme planeetoista ainoa, jolla vettä esiintyy runsaasti kaikissa veden olomuodoissa: kiinteänä (jää, lumi), nesteenä ja kaasuna (vesihöyry).

Vesi kiertää maapallolla. Veden kiertokulkua nimitetään hydrologiseksi kierroksi. Auringon lämpö haihduttaa vettä meristä, järvistä ja maalta. Ilma sitoo haihtuneen veden vesihöyrynä. Mitä lämpimämpää ilma on, sitä enemmän se voi sitoa vettä. Ilmavirtaukset kuljettavat mukanaan vesihöyryä ja täten myös sateita alueilta toisille. Tiivistynyt vesihöyry palaa takaisin Maan pinnalle sadevetenä. Osa maapallolle sataneesta vedestä kerääntyy pintavesiksi, osa imeytyy pohjavesiksi. Osa sadevedestä varastoituu jäätiköihin.



Kivikehä eli litosfääri koostuu maan kuoresta ja vaipasta. Litosfääri on jakaantunut jäykkiin laattoihin, joita kutsutaan mannerlaatoiksi. Nämä manner- eli litosfäärilaatat liikkuvat joko toisiinsa törmäten, erkaantuen toistaan tai toisiaan sivuten. Maanjäristykset ja tulivuorenpurkaukset ovat yleisiä laattojen reuna-alueilla. Laattojen törmäys- ja erkanemisliikkeet tuovat uutta kiviainesta Maan pinnalle. Maanpinnalla kivi puolestaan rapautuu, kulkeutuu meren pohjaan ja puristuu takaisin maapallon vaippaan. Tätä kiertoa kutsutaan geologiseksi kierroksi.

ESIMERKKI 1

Hydrologisen tutkimuksen mukaan Uudellamaalla sadevedestä 40 % kulkeutuu jokien mukana mereen, 10 % imeytyy pohjavesiksi ja loppuosa haihtuu ilmakehään. Oletetaan, että vuotuinen sademäärä kasvaa kahtena peräkkäisenä vuonna ensin 10 % ja sitten 5 %. Samaan aikaan haihtuneen veden osuus pienenee kaksi prosenttiyksikköä kumpanakin vuonna. Kuinka monta prosenttia muuttuu näiden kahden vuoden aikana ilmakehään haihtuneen veden määrä?

RATKAISU

Prosentti

- $1\,\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$
- Kuinka monta prosenttia luku a on luvusta b?
  $\frac{a}{b} \cdot 100\,\%$
- Kuinka paljon on p % luvusta a?
  $\frac{p}{100} \cdot a$
- prosenttikerroin
  $\frac{p}{100}$
- prosenttikerroin muutos- ja vertailutilanteissa
  $1 \pm \frac{p}{100}$

Merkitään sadeveden määrää alussa kirjaimella A (mm). Koska sadeveden määrä kasvaa ensin 10 %, sadeveden määrä vuoden kuluttua on

$$100\,\% + 10\,\% = 110\,\%$$

eli 1,10-kertainen alkuperäiseen määrään verrattuna. Sadeveden määrä ensimmäisenä vuonna on siis $1{,}10A$.

Toisena vuonna sadeveden määrä kasvaa edelleen 5 % eli tulee 1,05-kertaiseksi.

Sadeveden määrä toisena vuonna on $1{,}05 \cdot 1{,}10A = 1{,}155A$.

Sadevesistä ilmakehään haihtuu alussa $100\,\% - 40\,\% - 10\,\% = 50\,\%$, joten ilmakehään haihtuu vettä $0{,}5A$.

Haihtuvan veden osuus pienenee kahdella prosenttiyksiköllä vuodessa, eli kahden vuoden kuluttua osuus on pienentynyt $2 \cdot 2 = 4$ prosenttiyksikköä. Tällöin ilmakehään haihtuu $50\,\% - 4\,\% = 46\,\%$ sadevesistä.

Koska sadevesien määrä kahden vuoden kuluttua on $1{,}155A$ mm, niin haihtuneen veden määrä on

$$0{,}46 \cdot 1{,}155A = 0{,}5313A.$$

Lasketaan, kuinka paljon tämä on prosentteina alkuperäisestä haihtuneen veden määrästä.

$$\frac{0{,}5313A}{0{,}5A} = 1{,}0626 = 106{,}26\,\%$$

Haihtuneen veden määrä kasvaa $6{,}26\,\% \approx 6{,}3\,\%$.

VASTAUS

kasvaa 6,3 %

ESIMERKKI 2

Kivi on lämpötilan ja kosteuden vaikutuksesta rapautunut niin, että sen tilavuus on pienentynyt 6,1 %. Tästä johtuen kiven massa on 4,5 % alkuperäistä massaa pienempi. Kuinka monta prosenttia kiven tiheys on muuttunut?

RATKAISU

Merkitään kiven tilavuutta alussa kirjaimella V ja kiven massaa kirjaimella m. Kiven tiheys alussa on tällöin

$$\rho_{\text{alku}} = \frac{m}{V}.$$

Kiven tilavuus pienenee 6,1 % eli on 100 % – 6,1 % = 93,9 % alkuperäisestä. Kiven tilavuus rapautumisen jälkeen on $0{,}936V$.

Massa on rapautumisen jälkeen 100 % – 4,5 % = 95,5 % alkuperäisestä eli $0{,}955m$.

Rapautumisen jälkeen kiven tiheys on

$$\frac{0{,}955m}{0{,}936V} = 1{,}02029... \frac{m}{V}.$$

Kiven tiheys on kasvanut

$$1{,}02029... \frac{m}{V} - 1\frac{m}{V} = 0{,}02029... \frac{m}{V} \approx 0{,}020\frac{m}{V}.$$

Tämä on noin 2,0 % alkuperäisestä tiheydestä.

VASTAUS

Kiven tiheys on kasvanut 2,0 %.

INFO

Kartta on pienoismalli todellisesta ympäristöstä. Sen avulla voidaan helposti havainnollistaa laajoja alueellisia kokonaisuuksia. Varhaisimpia maantieteellisiä karttoja laativat muinaiset egyptiläiset, babylonialaiset ja foinikialaiset. Vanhin tunnettu kartta on babylonialaisten tekemä savitaulukartta, joka on tehty noin 2500 vuotta ennen ajanlaskumme alkua.

Kartan tärkein tehtävä on kertoa, miten paikat sijaitsevat toisiinsa nähden. Jotta kartasta pystyttäisiin arvioimaan todelliset välimatkat, kartan mittakaava on tunnettava. Mittakaava esitetään yleensä kartan reunaan merkityllä suhdeluvulla sekä mittakaavaa kuvaavalla janalla. Mittakaava ilmoittaa kartan muuntosuhteen. Esimerkiksi mittakaava 1:20 000 tarkoittaa, että 1 senttimetri kartalla vastaa 20 000 senttimetriä luonnossa.

ESIMERKKI 3

Maastokartan mittakaava on 1:20 000. Polun pituus maastokartalla on 15,4 cm.

a) Kuinka pitkä sama polku on kartalla, jonka mittakaava on 1:50 000?

b) Mikä on kartan mittakaava, jos saman polun pituus kartalla on 2,2 cm?

RATKAISU

a) Lasketaan ensin polun pituus luonnossa. Merkitään polun pituutta luonnossa kirjaimella x.

Pituus kartalla (cm)	Pituus luonnossa (cm)
1	20 000
15,4	x

Suoraan verrannollisuus

- Suureet ovat suoraan verrannollisia, jos toisen suureen kasvaessa toinen kasvaa samassa suhteessa.
- Verranto muodostetaan merkitsemällä suhteet yhtä suuriksi.

Pituudet muuttuvat samassa suhteessa, joten ne ovat suoraan verrannolliset. Saadaan verranto

$$\frac{1}{15,4} = \frac{20000}{x}$$

$$x = 15,4 \cdot 20000$$

$$x = 308000 \quad \text{(cm)}$$

Polun pituus on luonnossa 308 000 cm = 3080 m.

Merkitään polun pituutta toisella kartalla kirjaimella y.

Pituus kartalla (cm)	Pituus luonnossa (cm)
1	50 000
y	308 000

Saadaan verranto

$$\frac{1}{y} = \frac{50000}{308000}$$

$$50000y = 308000 \quad \big| : 50000$$

$$y = 6,16$$

$$y \approx 6,2 \quad \text{(cm)}$$

b) Kartalla määritetyn polun pituuden suhde todelliseen polun pituuteen on

$$\frac{2{,}2\,\text{cm}}{308\,000\,\text{cm}} \overset{(2{,}2}{=} \frac{1}{140\,000} = 1:140\,000.$$

Kartan mittakaava on siis 1:140 000.

VASTAUS a) 6,2 cm b) 1:140 000

ESIMERKKI 4

Kartalta mitattiin Helsingin ja Tampereen välinen etäisyys. Etäisyys linnuntietä pitkin oli 9,6 cm. Suomen ala samalla kartalla oli 15,0 dm^2.

a) Mikä oli kartan mittakaava, kun todellinen Tampereen ja Helsingin välinen etäisyys linnuntietä mitattuna on 144 km?

b) Laske Suomen todellinen ala.

RATKAISU

a) Yksi senttimetri kartalla vastaa luonnossa pituutta x senttimetriä.

Muunnetaan ensin Helsingin ja Tampereen välinen etäisyys senttimetreiksi.

144 km = 14 400 000 cm

Pituus kartalla (cm)	Pituus luonnossa (cm)
1	x
9,6	14 400 000

Tästä saadaan verrantoyhtälö

$$\frac{1}{9{,}6} = \frac{x}{14\,400\,000}$$

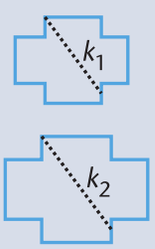
Mittakaavan voi määrittää myös kuten esimerkissä 3.

$$9{,}6x = 14\,400\,000 \quad | : 9{,}6$$

$$x = 1\,500\,000$$

Kartan mittakaava oli siis 1:1 500 000.

Yhdenmuotoisuussuhde eli mittakaava



$$\frac{k_1}{k_2}$$

Yhdenmuotoisten kuvioiden alojen suhde

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2$$

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^3$$

b) Olkoon Suomen todellinen ala A. Pinta-alojen suhde on yhtä suuri kuin mittakaavan neliö.

$$\frac{15{,}0}{A} = \left(\frac{1}{1\,500\,000}\right)^2$$

$$\frac{15{,}0}{A} = \frac{1}{1\,500\,000^2}$$

$$A = 15{,}0 \cdot 1\,500\,000^2$$

$$A = 3{,}375 \cdot 10^{13} \approx 3{,}4 \cdot 10^{13}\,(\text{dm}^2)$$

Suomen todellinen ala on siis $3{,}4 \cdot 10^{13}$ dm^2 = 340 000 km^2.

VASTAUS a) 1:1 500 000 b) 340 000 km^2

ESIMERKKI 5

Vuorovesi-ilmiö Maan pinnalla johtuu suurimmaksi osaksi Kuun ja Auringon aiheuttamista gravitaatiovoimista. Kahden kappaleen välinen gravitaatiovoima on kääntäen verrannollinen kappaleiden etäisyyden neliöön. Kuun etäisyys Maasta on noin 384 400 km. Laske, kuinka kaukana Kuun tulisi Maasta olla, jotta sen ja Maan välisen gravitaatiovoiman suuruus pienenisi 20 %.

RATKAISU

Merkitään kysyttyä Kuun etäisyyttä kirjaimella x.

Merkitään Kuun ja Maan välistä gravitaatiovoimaa kirjaimella a.

Jos gravitaatiovoima pienenee 20 %, se tulee 1 – 0,2 = 0,8 -kertaiseksi. Gravitaatiovoima muutoksen jälkeen on siis $0{,}8a$.

Gravitaatio-voima	Etäisyys^2
a	$384\,400^2$
$0{,}8a$	x^2

Gravitaatiovoima on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön. Tästä saadaan verranto

$$\frac{a}{0{,}8a} = \frac{x^2}{384\,400^2}$$

$$0{,}8x^2 = 384\,400^2 \quad \big| : 0{,}8$$

$$x^2 = 1{,}847\ldots \cdot 10^{11}$$

$$x = \pm 429\,772{,}2\ldots$$

Etäisyys on aina positiivinen, joten $x = 429\,772{,}2\ldots$ km $\approx$ 429 800 km.

VASTAUS 429 800 km

Kääntäen verrannollisuus

- Suureet ovat kääntäen verrannollisia, jos toisen suureen kasvaessa toinen pienenee samassa suhteessa
- Verrantoa muodostettaessa toinen suhde käännetään.

Tehtäviä

E 1

61. Tuotteen myyntihinta laski 8 %. Myyntipalkkio, joka oli 25 % myyntihinnasta, nostettiin samalla 31 prosenttiin uudesta myyntihinnasta. Nousiko vai laskiko myyntipalkkio? [S1997, 4a]

E 2

62. Lentoyhtiön reittilennon hinta Helsingistä Roomaan kohosi 8,0 %. Samalla matkustajamäärä väheni 12,0 %.
    a) Kuinka paljon muuttuivat lentoyhtiön reittilennosta saamat myyntitulot?
    b) Kuinka monta prosenttia myyntitulojen pitäisi kasvaa, jotta päästäisiin takaisin alkuperäiseen myyntituloon?

E 3

63. Pekka on lomamatkalla Prahassa. Hän kävelee Kaarlen sillalta Vaclavin aukiolle. Kartalla matkan pituus on 6,0 cm.
    a) Mikä on matka luonnossa, kun kartan mittakaava on 1:20 000?
    b) Jalmari ilmoittaa Pekalle tekstiviestillä, että hän on 0,5 km päässä Kaarlen sillasta. Millä säteellä tämä on kartalta katsoen?
    c) Määritä kartan mittakaava, jos kartalla matka Kaarlen sillalta Vaclavin aukiolle on 2,4 cm.

E 4

64. Lappajärvi sijaitsee samannimisen kunnan ja Vimpelin kunnan alueella Etelä-Pohjanmaalla. Kartalla järven suurin pituus on 1,6 cm. Luonnossa vastaava matka on 24 km. Järven ala kartalla on noin 0,62 cm^2. Määritä kartan mittakaava ja laske järven pinta-ala.

E 5

65. Henkilö seisoo 3,0 m päässä lampusta. Mille etäisyydelle lampusta hänen olisi siirryttävä, jotta lampun valaistusvoimakkuus pienenisi 40 %? Valaistusvoimakkuus on kääntäen verrannollinen valolähteestä lasketun etäisyyden neliöön.

66. Yrityksen liikevaihto oli vuoden toisella neljänneksellä 11 % pienempi kuin vuoden ensimmäisellä neljänneksellä. Kokonaisuudessaan yrityksen liikevaihto kyseisen puolen vuoden osalta oli 6,0 miljoonaa euroa. Kuinka suuri yrityksen liikevaihto oli vuoden ensimmäisellä neljänneksellä? [K2001, 5]

67. Tuotteen myyntihinta saadaan, kun verottomaan hintaan lisätään arvonlisävero, jonka suuruus on 22 prosenttia verottomasta hinnasta. Kuinka monta prosenttia arvonlisävero on myyntihinnasta? Riippuuko tämä prosentti myyntihinnasta? [S2001, 3]

68. Muropakettia suurennettiin siten, että siihen mahtuu 10 % enemmän muroja kuin aikaisemmin. Samalla hintaa korotettiin 12 %. Muutoksen seurauksena paketteja myytiin 10 % aikaisempaa vähemmän. Lisääntyikö vai vähentyikö murojen myynti mitattuna
    a) murojen painona
    b) rahana? Kuinka monta prosenttia muutos oli? [K2002, 5]

69. Tietosanakirjan ensimmäisessä osassa on 960 sivua. Kirjan paksuus ilman kansia on 6,5 cm. Kansi on tehty pahvista, jonka paksuus on 4 mm. Kuinka paksu on toinen osa kansineen, kun siinä on 1110 sivua?

70. Kolmion ABC sivulta AC valitaan piste D siten, että pituuksien AD ja DC suhde on 3:2. Kolmio ABC jaetaan kahteen osaan janalla, joka kulkee pisteen D kautta ja on janan AB suuntainen. Laske osien alat, kun kolmion ala on 125 cm^2.

71. Kukkaruukku on muodoltaan katkaistu ympyräkartio. Kukkaruukun suuaukon halkaisija on 35 cm ja pohjan halkaisija 25 cm. Ruukun korkeus on 20 cm. Kuinka paljon kukkaruukkuun mahtuu multaa?

72. Maantiekartassa on joitakin teiden risteyksiä merkitty ympyrällä, jonka halkaisija on 1,8 mm. Mitä risteysalueen halkaisijaa tämä vastaa todellisuudessa, kun kartan mittakaava on 1:200 000? Jos risteysalueen halkaisija todellisuudessa on 25 m, niin kuinka suuri sen tulisi kyseisellä kartalla olla? [K2001, 1]

73. Metsäpalstan pinta-alaksi peruskartalla mitattiin 2,9 cm^2, missä mittausvirhe on enintään 0,1 cm^2. Laske palstan koko hehtaareina ja sen maksimivirhe, kun peruskartan mittakaava on 1:20 000. [K2004, 4]

74. Light Jaffaa myydään 0,5 l ja 1,5 l muovipulloissa. Pullot ovat samanmuotoiset.
    a) Laske pienemmän pullon korkeus, kun ison pullon korkeus on 34 cm.
    b) Kuinka monta prosenttia enemmän muovia on isommassa pullossa pikkupulloon verrattuna? Pullojen muovimäärä on suoraan verrannollinen niiden pinta-alaan.

75. Jalallisen viinilasin sisätila on kärjellään seisova suora ympyräkartio, jonka tilavuus on 1,75 dl. Kuinka paljon lasissa on nestettä nestepinnan lasissa ulottuessa puoleenväliin lasin sisätilan korkeudesta? [S2002, 5]

76. Mars-planeetan tilavuus on likimain $1{,}63 \cdot 10^{11}$ km^3 ja Maan tilavuus noin $1{,}08 \cdot 10^{12}$ km^3. Kuinka monta prosenttia suurempi Maan säde on Marsin säteeseen verrattuna? Anna vastaus prosentin tarkkuudella.

77. a) Millainen verrannollisuus on ajan ja nopeuden välillä?
    b) Perttu on pyöräretkellä. Nopeusmittari näyttää 16 km/h. Perttu arvioi jäljellä olevan matkan kestävän 3,5 h, jos hän pyöräilee samalla vauhdilla. Kuinka kauan loppumatka kestäisi nopeudella 12 km/h? Anna vastaus tunteina ja minuutteina.

78. Pihalla olevan suihkulähteen täyttäminen kahdella samanlaisella pumpulla kestää 20 min. Kuinka monta pumppua tarvittaisiin lisää, jotta täyttämiseen menisi 60 % vähemmän aikaa?

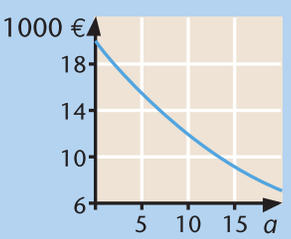
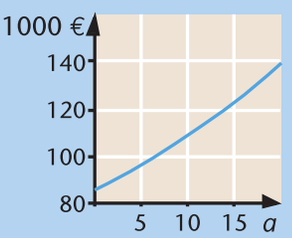
79. Auton pysähtymismatka riippuu sekä reaktioajasta että itse jarrutusmatkasta. Reaktioaikana kuljettu matka on suoraan verrannollinen nopeuteen ja jarrutusmatka suoraan verrannollinen nopeuden neliöön. Testiajossa havaittiin, että ajonopeuden ollessa 90 km/h reaktiomatka oli 18 m ja jarrutusmatka 49 m. Laske pysähtymismatka, kun ajonopeus on 110 km/h. [preli, K2005, 10]

80. Kasvin varren halkaisija d riippuu kasvuajasta t yhtälön $d = k \cdot \sqrt{t}$ mukaisesti, jossa k on verrannollisuuskerroin. Kasvin varsi on 9 mm paksuinen 36 vuorokauden ikäisenä. Kuinka paksu varsi on 100 vuorokauden ikäisenä? [S1997, 3b]

81. Valaistusvoimakkuus on kääntäen verrannollinen valolähteestä lasketun etäisyyden neliöön. Lampun ja kynttilän valaistusvoimakkuuksien suhde on 6:1. Ne ovat 4,0 m etäisyydellä toisistaan. Lampun ja kynttilän väliin laitetaan mittari. Mille etäisyydelle lampusta se on asetettava, jotta valaistusvoimakkuudet ovat yhtä suuret molemmissa valolähteissä?

3 Työvälineitä II – Potenssi- ja eksponenttiyhtälöt

Jonkin hyödykkeen arvo voi muuttua eksponentiaalisesti esimerkiksi viiden vuoden ajanjaksolla. Tällöin arvo muuttuu aina yhtä monta prosenttia aikayksikössä. Muutos on joko eksponentiaalista vähenemistä tai kasvamista.

	Eksponentiaalinen väheneminen	**Eksponentiaalinen kasvu**
Esimerkkitilanne	Auton arvo uutena oli 20 000 €. Sen arvon oletetaan laskevan 5 % vuosittain.	Asunnon arvo uutena oli 85 000 €. Sen arvon oletetaan nousevan 2,5 % vuosittain.
Muutoskerroin *k*	100 % – 5 % = 95 % $k = 0{,}95$ $0 < k < 1$	100 % + 2,5 % = 102,5 % $k = 1{,}025$ $k > 1$
Alkuperäinen arvo	20 000 (€)	85 000 (€)
Funktio	$f(x) = 0{,}95x \cdot 20\,000$	$g(x) = 1{,}025x \cdot 85\,000$
Kuvaaja		

Eksponentiaaliseen muutokseen voi liittyä joko potenssiyhtälö tai eksponenttiyhtälö. Yhtälötyyppi riippuu siitä, mitä kysytään. Potenssiyhtälössä muutoskerroin on tuntematon. Eksponenttiyhtälössä eksponentti (esimerkiksi aika) on tuntematon. Yhtälöillä on tarkat ratkaisumenetelmät.

Yhtälöitä voidaan ratkaista myös likimääräisesti ns. haarukoimalla, mikäli tehtävänanto sitä edellyttää. Haarukointi etenee seuraavasti:

1. Muokkaa yhtälö ensin muotoon $f(x) = 0$.

$f(x) = 2^x - 3$
$2^x - 3 = 0$

2. Valitse tarkasteltava väli ja laske funktion arvot välin päätepisteissä. Muodosta väli niin, että funktio saa päätepisteissä erimerkkiset arvot.

$f(1) = -1 < 0$ ja
$f(3) = 5 > 0$

Ratkaisu on välillä [1, 3].

3. Pienennä väliä laskemalla funktion arvo päätepisteiden puolivälistä. Uusi tarkasteluväli saadaan valitsemalla välin päätepisteiksi ne muuttujan arvot, jossa funktio saa erimerkkiset arvot.

$f\left(\frac{1+3}{2}\right) = f(2) = 1 > 0$

Ratkaisu on välillä [1, 2].

4. Jatka välin pienentämistä, kunnes kaikki arvot tarkasteltavalla välillä pyöristyvät samaan lukuarvoon halutulla tarkkuudella (esimerkiksi yhden desimaalin tarkkuudella).

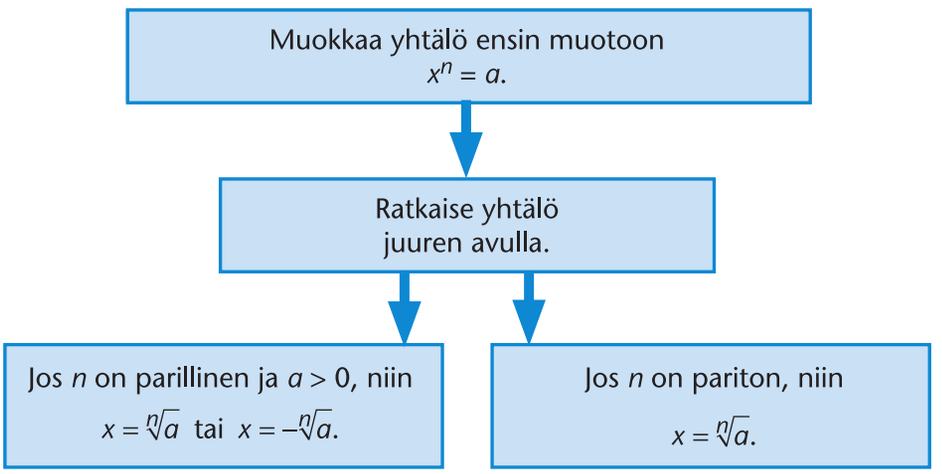
$f(1{,}56) = -0{,}051\ldots < 0$ ja
$f(1{,}62) = 0{,}073\ldots > 0$

Ratkaisu välillä [1,56; 1,62].

Yhtälön ratkaisu on $x \approx 1{,}6$.

Potenssiyhtälö

Potenssiyhtälössä tuntematon on muutoskerroin, joka esiintyy aina kantalukuna. Yhtälön ratkaisussa kannattaa noudattaa seuraavia vaiheita:



ESIMERKKI 1

Ratkaise yhtälö. Anna vastaus tarkkana arvona ja likiarvona kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

a) $6x^2 - 28 = 8$ b) $34 - 7x^5 = 55$ c) $1 - 2x^8 = 9$

RATKAISU

a) Muokataan yhtälö ensin muotoon $x^n = a$, minkä jälkeen yhtälö ratkaistaan juuren avulla.

$$\begin{aligned} 6x^4 - 28 &= 8 \\ 6x^4 &= 36 \quad |:6 \\ x^4 &= 6 \\ x &= \pm\sqrt[4]{6} \\ x &= \pm 1{,}5650... \approx \pm 1{,}57 \end{aligned}$$

Jos laskimesta puuttuu yleinen juurinäppäin $\sqrt[x]{\ }$, on ratkaisussa käytettävä murtopotenssia: $\sqrt[4]{6} = 6^{\frac{1}{4}}$.

Koska eksponentti on parillinen, yhtälöllä on kaksi ratkaisua.

b) $34 - 7x^5 = 55$

$$\begin{aligned} -7x^5 &= 21 \quad |:(-7) \\ x^5 &= -3 \\ x &= \sqrt[5]{-3} \\ x &= -1{,}2457... \approx -1{,}25 \end{aligned}$$

Negatiivisesta luvusta voi ottaa parittoman juuren.

c) $1 - 2x^8 = 9$

$$\begin{aligned} -2x^8 &= 8 \quad |:(-2) \\ x^8 &= -4 \end{aligned}$$

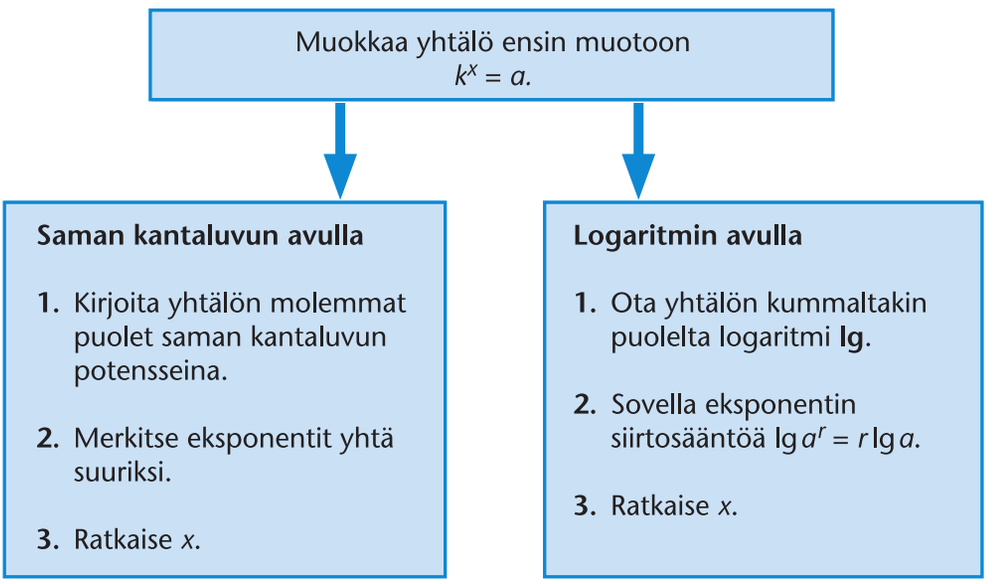
Parillista juurta ei voi ottaa negatiivisesta luvusta, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

VASTAUS

a) $x = \pm\sqrt[4]{6} \approx \pm 1{,}57$ b) $x = \sqrt[5]{-3} \approx -1{,}25$ c) Ei ratkaisua.

Eksponenttiyhtälö

Eksponenttiyhtälössä tuntematon on eksponenttina. Osa yhtälöistä voidaan ratkaista muokkaamalla niitä siten, että molemmille puolille saadaan sama kantaluku. Yleensä eksponenttiyhtälö saadaan ratkaistua logaritmin avulla. Ratkaisussa kannattaa noudattaa seuraavia vaiheita.



ESIMERKKI 2 Ratkaise yhtälö ilman logaritmia.

a) $2^{4x+1} = 1$ b) $9^x = \frac{1}{27}$

RATKAISU

a) Luku 1 voidaan kirjoittaa luvun 2 potenssina.

$$2^{4x+1} = 2^0$$
$$4x + 1 = 0$$
$$4x = -1 \quad | : 4$$
$$x = -\frac{1}{4}$$

b) Luku 9 ja luku 27 voidaan molemmat kirjoittaa luvun 3 potensseina.

$$(3^2)^x = \frac{1}{3^3}$$

Yhtälöä sievennetään potenssien laskusääntöjen avulla.

$$3^{2x} = 3^{-3}$$
$$2x = -3 \quad | : 2$$
$$x = -\frac{3}{2}$$

VASTAUS a) $x = -\frac{1}{4}$ b) $x = -\frac{3}{2}$

ESIMERKKI 3

Ratkaise yhtälö. Ilmoita vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

a) $6^x = 14$ b) $7 \cdot 5^x - 45 = -3$

RATKAISU

a) Yhtälö on muodossa $k^x = a$, joten se voidaan ratkaista ottamalla yhtälön kummaltakin puolelta logaritmi.

$$6^x = 14$$
$$\lg 6^x = \lg 14$$

eksponentin siirtosääntö
$\lg a^r = r \lg a$

$$x \cdot \lg 6 = \lg 14 \quad | : \lg 6$$
$$x = \frac{\lg 14}{\lg 6}$$
$$x = 1,47288... \approx 1,47$$

b) Muokataan yhtälö ensin muotoon $k^x = a$.

$$7 \cdot 5^x - 45 = -3$$
$$7 \cdot 5^x = 42 \quad | : 7$$
$$5^x = 6$$

Ratkaistaan x logaritmin avulla.

$$\lg 5^x = \lg 6$$
$$x \cdot \lg 5 = \lg 6 \quad | : \lg 5$$
$$x = \frac{\lg 6}{\lg 5}$$
$$x = 1,1132... \approx 1,11$$

VASTAUS

a) $x \approx 1,47$ b) $x \approx 1,11$

Tehtäviä

Ratkaise tehtävien 82 ja 83 yhtälöt. Anna vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

82. a) $5x^3 = 125$ b) $45x^4 = 90$ c) $3x^6 = 4$

83. a) $12y^7 + 24 = 0$ b) $2h^8 - 18 = 0$ c) $5a^6 + 30 = 0$

84. Ratkaise yhtälö. Anna vastaus tarkkana arvona ja likiarvona kahden desimaalin tarkkuudella.
a) $x^5 = -30$ b) $x^3 - 24 = 0$ c) $27x^4 - 8 = 0$

85. Ratkaise yhtälö.
a) $2x^3 = -16$ b) $5x^4 - 3 = 402$ c) $x^4 = -625$

86. Ratkaise muutoskerroin k kolmen desimaalin tarkkuudella. Päättele muutoskertoimen avulla, kuinka monta prosenttia arvo on kerralla muuttunut ja mihin suuntaan.
a) $155\,000k^4 = 198\,000$ b) $421\,500k^{12} = 250\,000$

87. Ratkaise yhtälöistä tuntematon x. Anna vastaus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.
a) $ax^4 = 2a,\ a \neq 0$ b) $2bx^7 = 3b,\ b \neq 0$ c) $100cx^8 = 5c,\ c \neq 0$

88. Ratkaise yhtälö. Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.
a) $5(x^6 - 2) + 2 = 1$ b) $-3x^2(2 + 4x^5) = 8 - x(6x + 2x^6)$

89. Funktioiden $f(x) = x^3 + x^2 - 100$ ja $g(x) = 8 + x^2 - 3x^3$ kuvaajat leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä. Määritä tämä piste.

Ratkaise tehtävien 90–91 yhtälöt ilman logaritmia. Anna vastaus tarkkana arvona.

90. a) $3^{x+1} = 9$ b) $16^x = \frac{1}{2}$ c) $6^{4x-1} - 1 = 0$

91. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x}$ b) $4 \cdot 16^x = 1$ c) $3\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = 48$

Ratkaise tehtävien 92–94 yhtälöt ja anna vastaus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

92. a) $4^x - 6 = 0$ b) $3 \cdot 7^x - 8 = 0$ c) $8 \cdot 3^{x-1} - 2 = 3$

93. a) $6 \cdot 4^x - 5 = 13$ b) $2{,}3^{x-1} = 1{,}8$

94. a) $\frac{12^x}{4} = 5$ b) $2 \cdot 2^{5x} = 30$ c) $3^x \cdot 4^x = 2$

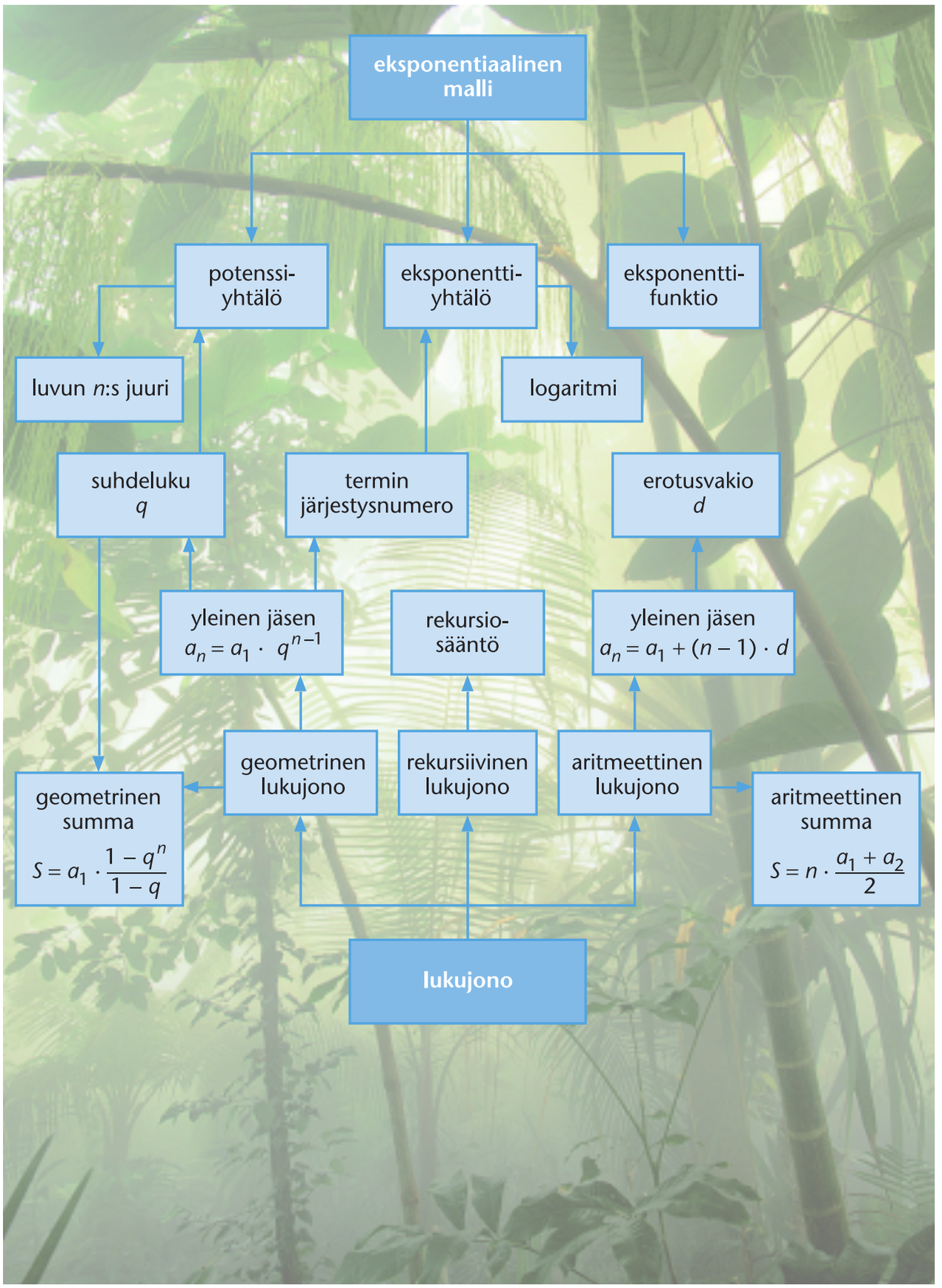
95. Ratkaise yhtälö. Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.
a) $150\,000 \cdot 1{,}05^x = 180\,000$ b) $3450 \cdot 0{,}98^x = 2000$

96. Etsi haarukoimalla yhtälön $4x^5 = 78$ ainoa ratkaisu kahden desimaalin tarkkuudella.

97. Yhtälöllä $3^x - 1 = 2{,}3^x$ on yksi ratkaisu. Ratkaise yhtälö yhden desimaalin tarkkuudella.

98. Kumpi luvuista 5^{4500} vai 4^{5400} on suurempi? (Ohje: Kirjoita kantaluvut logaritmin avulla, $a = 10^{\lg a}$.)

4 Luonnonvarat ja kestävä kehitys

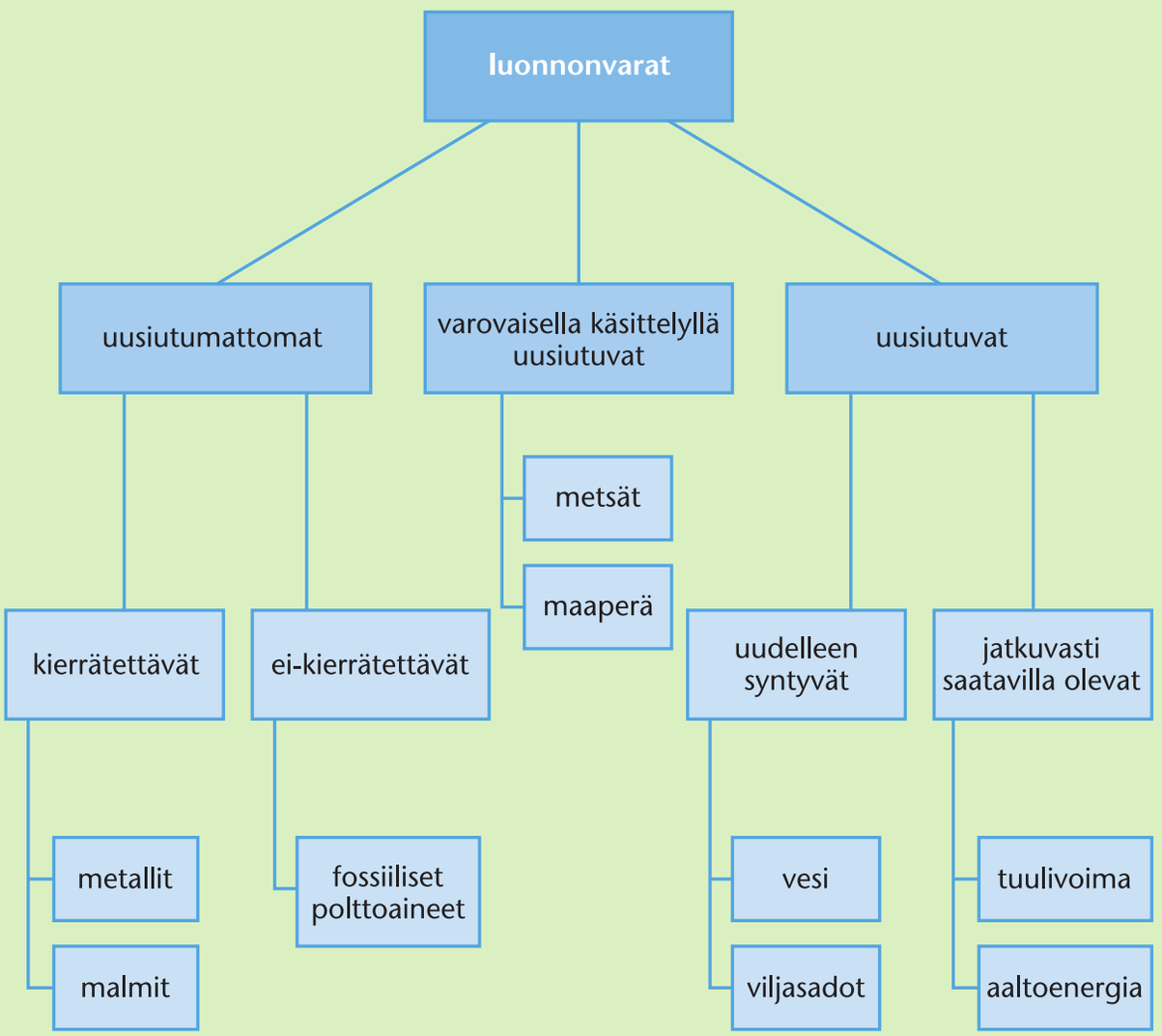


4.1 Eksponentiaalinen malli

INFO

Luonnonvaroilla tarkoitetaan sellaisia ympäristön ominaisuuksia tai aineita, joille voidaan määrittää jonkinlainen hinta. Hinnan määrittämisen lisäksi luonnonvarojen hyväksikäytön tulee olla mahdollista niin teknologisesti kuin taloudellisestikin.

Luonnonvarat voidaan jakaa uusiutumattomiin ja uusiutuviin luonnonvaroihin. Uusiutumattomiin luonnonvaroihin kuuluvat esimerkiksi fossiiliset polttoaineet. Uusiutuvia luonnonvaroja ovat esimerkiksi tuuli ja metsät.



ESIMERKKI 1

Suomessa käytettiin kivihiiltä tammi–heinäkuussa 2004 sähkön- ja lämmöntuotannon polttoaineena yhteensä noin 4,2 miljoonaa tonnia. Kivihiilen käyttö laski jakson jokaisena kuukautena suhteessa keskimäärin yhtä paljon aina edelliseen kuukauteen verrattuna.

a) Kuinka monta prosenttia kivihiilen käyttö laski kuukausittain, kun tammikuussa kivihiiltä käytettiin 890 000 tonnia ja heinäkuussa 140 000 tonnia?

b) Kuinka paljon kivihiiltä käytettiin huhtikuussa 2004?

RATKAISU

a) Kivihiilen käyttö vähenee kuuden kuukauden aikana 890 000 tonnista 140 000 tonniin. Käyttö laskee kuukaudessa aina yhtä monta prosenttia.

Merkitään laskua kuvaavaa muutoskerrointa kirjaimella k.

Saadaan yhtälö

$$890000 \cdot k^6 = 140000 \quad | : 890000$$

$$k^6 = \frac{140000}{890000}$$

$$k = \pm\sqrt[6]{\frac{140000}{890000}}$$

$$k = \pm 0{,}7347\ldots$$

Muutoskerroin on aina positiivinen, joten $k = 0{,}7347\ldots$

Kivihiilen käyttö vähenee siis kuukaudessa
$1 - 0{,}7347\ldots = 0{,}265\ldots \approx 27\ \%$.

b) Kivihiilen käytön vähenemistä yhdessä kuukaudessa kuvaa muutoskerroin

$$k = \sqrt[6]{\frac{140000}{890000}} = 0{,}7347\ldots$$

Tammikuusta huhtikuuhun muutoskertojen määrä on 3.

Huhtikuussa kivihiiltä käytetään siis

$$890000 \cdot 0{,}7347\ldots^3 = 352987{,}2\ldots$$

$$\approx 350000 \text{ (tonnia)}.$$

Mikä on suureen arvo **alussa**?

Mikä on suureen arvo **lopussa**?

Kuinka **monta kertaa** suure muuttuu?

Muutoskerroin on tuntematon.

↓

Muodosta lauseke, joka kuvaa suureen arvoa tehtävänannossa ilmoitetun muutosmäärän jälkeen.

↓

Muodosta **potenssiyhtälö** suureen muuttuneen arvon kanssa.

↓

Ratkaise yhtälöstä muutoskerroin **juuren** avulla.

VASTAUS

a) 27 % kuukaudessa b) 350 000 tonnia

ESIMERKKI 2

Teollistuneet maat kuluttavat käytössään olevista vesivaroista kasteluun noin 70 %. Kehitysmaissa vastaava osuus tällä hetkellä on noin 90 %. Oletetaan, että kehitysmaat päättävät vähentää veden käyttöä kastelutarkoitukseen 3,5 % vuosittain. Missä ajassa kehitysmaiden kasteluun käytetty vesimäärä laskee suhteellisesti samalle tasolle kuin teollistuneissa maissa?

RATKAISU

Mikä on suureen arvo **alussa**?

Kuinka **monta prosenttia** suure kerralla muuttuu?

Mikä on suureen arvo **lopussa**?

Muutoskertojen määrä on tuntematon *n*.

Muodosta lauseke, joka kuvaa suureen arvoa *n* muutoskerran jälkeen.

Muodosta **eksponenttiyhtälö** suureen muuttuneen arvon kanssa.

Ratkaise yhtälöstä muutoskertojen määrä **logaritmin** avulla.

Tarkastellaan kehitysmaiden vesivarojen käyttöä. Todellista kehitysmaiden vesivarojen määrää ei tiedetä, joten merkitään sitä kirjaimella A.

Vesivaroille ei saa antaa kuvitteellista lukuarvoa, vaan sitä on merkittävä kirjaimella.

Kehitysmaissa vesivaroista käytetään aluksi kasteluun 90 % eli $0{,}9A$.

Veden käyttö kastelutarkoituksiin vähenee 3,5 % vuosittain, eli vesimäärä tulee vuosittain $1 - 0{,}035 = 0{,}965$ -kertaiseksi.

Lopputilanteessa vesivaroja käytettäisiin kasteluun 70 % eli $0{,}7A$.

Merkitään kysyttyä vuosien määrää kirjaimella n.

Saadaan yhtälö

$$0{,}9A \cdot 0{,}965^n = 0{,}7A \quad \big| : A \neq 0$$

$$0{,}9 \cdot 0{,}965^n = 0{,}7 \quad \big| : 0{,}9$$

$$0{,}965^n = \frac{0{,}7}{0{,}9}$$

$$\lg 0{,}965^n = \lg\frac{0{,}7}{0{,}9}$$

$$n \lg 0{,}954 = \lg \frac{0{,}7}{0{,}9} \quad \big| : \lg 0{,}965$$

$$n = \frac{\lg\frac{0{,}7}{0{,}9}}{\lg 0{,}965}$$

$$n = 7{,}054...$$

Muista laittaa murtolauseke $\frac{0{,}7}{0{,}9}$ sulkuihin syöttäessäsi sitä laskimeen. Näin laskujärjestys pysyy oikeana.

Kasteluun käytetty vesimäärä saavuttaa 70 % rajan noin 7 vuodessa.

VASTAUS 7 vuodessa

Esimerkki 3

Trooppiset sademetsät ovat yksi maapallon rikkaimmista ekosysteemeistä. Vuonna 1970 noin 1,0 % Amazonin sademetsistä oli tuhoutunut, kun vuonna 2000 tuhoutuneen sademetsän määrä oli 15,0 %.

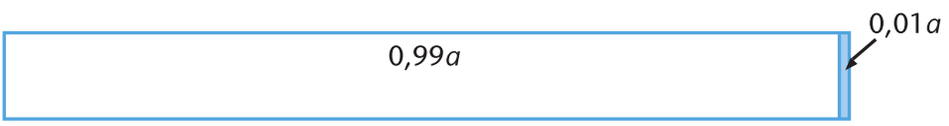
a) Jos sademetsien tuhoutuminen olisi tällä aikavälillä noudattanut eksponentiaalista mallia, kuinka monta prosenttia sademetsistä olisi tuhoutunut vuosittain?

b) Jos sademetsien tuhoutuminen jatkuisi samalla vauhdilla, minä vuonna sademetsiä olisi jäljellä alle 1,0 %?

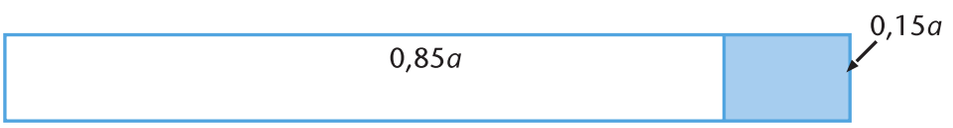
Ratkaisu

a) Merkitään sademetsien määrää alussa kirjaimella a.

Vuonna 1970 metsistä oli tuhoutunut 1,0 % eli metsiä oli jäljellä $0{,}99a$.



Vuonna 2000 tuhoutuneiden sademetsien määrä oli 15,0 %, joten niitä oli jäljellä $0{,}85a$.



Jos tuhoutuminen noudattaa eksponentiaalista mallia, sademetsiä tuhoutuu joka vuosi yhtä monta prosenttia. Merkitään tätä metsien määrän vuosittaista vähenemistä kuvaavaa muutoskerrointa kirjaimella k.

Tarkasteltava aikaväli on $2000 - 1970 = 30$ vuotta.

Saadaan yhtälö

$$0{,}99a \cdot k^{30} = 0{,}85a \qquad \big| : a \neq 0$$

$$0{,}99 \cdot k^{30} = 0{,}85 \qquad \big| : 0{,}99$$

$$k^{30} = \frac{0{,}85}{0{,}99}$$

$$k = \pm \sqrt[30]{\frac{0{,}85}{0{,}99}}$$

$$k = \pm 0{,}9949...$$

Koska muutoskerroin on aina positiivinen, $k = 0{,}9949\ldots$

Sademetsiä olisi tuhoutunut vuosittain

$1 - 0{,}9949\ldots = 0{,}005069\ldots \approx 0{,}51\ \%$.

b) Kun sademetsiä on jäljellä 1,0 %, on niiden määrä $0{,}01a$. Merkitään kysyttyä vuosien määrää kirjaimella n.

$$0{,}99a \cdot 0{,}9949...^{n} = 0{,}01a \qquad \big| : a$$

$$0{,}99 \cdot 0{,}9949...^{n} = 0{,}01 \qquad \big| : 0{,}99$$

$$0{,}9949...^{n} = \frac{0{,}01}{0{,}99}$$

$$\lg 0{,}9949...^{n} = \lg \frac{0{,}01}{0{,}99}$$

$$n \lg 0{,}9949... = \lg \frac{0{,}01}{0{,}99} \qquad \big| : \lg 0{,}9949...$$

$$n = \frac{\lg \frac{0{,}01}{0{,}99}}{\lg 0{,}9949...} = 904{,}144...$$

Sademetsien määrä saavuttaisi 1,0 prosentin rajan vuoden 1970 + 904 = 2874 aikana.

Vuosi 2875 olisi ensimmäinen, jolloin sademetsien määrä olisi koko ajan alle 1,0 % alkuperäisestä määrästä.

VASTAUS

a) 0,51 % vuosittain
b) Sademetsien määrä alittaisi 1,0 % rajan vuoden 2874 aikana.

ESIMERKKI 4

Suurin osa Suomessa käytettävistä luonnonvaroista on uusiutuvia luonnonvaroja, kuten vettä ja puuta. Suomen puuvaranto on tänä päivänä noin neljänneksen suurempi kuin sotien jälkeen. Metsien hakkuutavoite vuonna 2005 oli noin 650 000 hehtaaria, josta harvennushakkuuta on noin 390 000 hehtaaria. Loput hakkuista suoritetaan muilla menetelmillä. Jos harvennushakkuiden määrää vähennettäisiin vuosittain 2,0 % ja vastaavasti muiden hakkuiden määrää kasvatettaisiin 2,0 %, niin kuinka monen vuoden kuluttua muiden menetelmien hakkuutavoite ylittäisi harvennushakkuiden määrän?

RATKAISU

Muodostetaan ensin lauseke, joka kuvaa harvennushakkuiden määrää n vuoden kuluttua.

- Hakkuutavoite alussa on 390 000 ha.
- Määrää vähennetään 2,0 % eli se tulee 0,98-kertaiseksi.

$$0{,}98^n \cdot 390\,000$$

Muodostetaan samalla tavoin lauseke muiden hakkuiden määrälle n vuoden kuluttua.

- Hakkuutavoite alussa $650\,000 - 390\,000 = 260\,000$ ha.
- Määrää lisätään 2,0 %, eli se tulee 1,02-kertaiseksi.

$$1{,}02^n \cdot 260\,000$$

Muodostetaan yhtälö, jonka avulla lasketaan, milloin hakkuiden määrät ovat yhtä suuret.

Harvennushakkuiden määrä hehtaareina n vuoden kuluttua on $0{,}98^n \cdot 390\,000$.

Muiden hakkuiden määrä hehtaareina n vuoden kuluttua on $1{,}02^n \cdot 260\,000$.

$$0{,}98^n \cdot 390\,000 = 1{,}02^n \cdot 260\,000.$$

Yhtälössä tulisi saada muuttujat yhtälön vasemmalle puolelle ja vakiot oikealle puolelle niin, että yhtälö on ratkaistavissa. Tässä yhtälössä se onnistuu jakolaskun avulla.

$$0{,}98^n \cdot 390000 = 1{,}02^n \cdot 260000 \quad \big| : 390000$$

$$0{,}98^n = 1{,}02^n \cdot \frac{260000}{390000} \quad \big| : 1{,}02^n$$

$$\left(\frac{0{,}98^n}{1{,}02^n}\right) = \frac{26}{39}$$

potenssien laskusääntö $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$$\left(\frac{0{,}98}{1{,}02}\right)^n = \frac{26}{39}$$

$$\lg\left(\frac{0{,}98}{1{,}02}\right)^n = \lg\left(\frac{26}{39}\right)$$

$$n \cdot \lg\left(\frac{0{,}98}{1{,}02}\right) = \lg\left(\frac{26}{39}\right) \quad \big| : \lg\left(\frac{0{,}98}{1{,}02}\right)$$

$$n = \frac{\lg\left(\frac{26}{39}\right)}{\lg\left(\frac{0{,}98}{1{,}02}\right)}$$

Syötä laskimeen kokonainen lauseke tarkoilla arvoilla. Käytä tarvittaessa sulkuja oikean laskujärjestyksen säilyttämiseksi.

$$n = 10{,}13...$$

Saadut ratkaisut on hyvä aina tarkistaa. Yhtälöön tai lausekkeeseen sijoittaminen sekä kuvaajan piirtäminen (graafisella laskimella) ovat esimerkiksi hyviä ja nopeita tapoja tarkistamiseen.

Hakkuutavoitteet määritellään aina vuosittain. Kymmenennen vuoden hakkuutavoite muille hakkuille ei vielä riitä ylittämään harvennushakkuiden määrää. Vasta 11. vuoden hakkuutavoite muille hakkuille ylittää harvennushakkuiden tavoitteet.

Tarkistetaan tulos vielä laskemalla eri hakkuiden määrät 10 ja 11 vuoden kuluttua tarkastelun alusta.

	Harvennushakkuut (ha)	**Muut hakkuut (ha)**
10. vuoden kuluttua	$0{,}98^{10} \cdot 390\,000 = 318\,658{,}39...$	$1{,}02^{10} \cdot 260\,000 = 316\,938{,}54...$
11. vuoden kuluttua	$0{,}98^{11} \cdot 390\,000 = 312\,285{,}22...$	$1{,}02^{11} \cdot 260\,000 = 323\,277{,}32...$

VASTAUS 11 vuoden kuluttua

Tehtäviä

E 1

99. Laboratoriossa tutkittiin natriumin radioaktiivista isotooppia Na-11. Natriumnäytteen massa tutkimuksen alussa oli 12,00 g. Alkuainetta oli jäljellä 15 tunnin kuluttua 6,02 g. Jos hajoamisen oletetaan olevan eksponentiaalista, kuinka monta prosenttia natriumista hajoaa yhden tunnin aikana?

E 2

100. Teemu sijoitti 15 000 euroa Itä-Eurooppa-rahastoon. Sen vuosikasvu on ollut jopa 30 %. Jos kasvu jatkuu samanlaisena, kuinka monessa vuodessa Teemun sijoitusten arvo ylittää 100 000 euroa?

E 3

101. Peltolohkon viljasato peltolohkolla oli aikaisemmin 4900 kg/ha. Kuuden vuoden aikana satomäärät ovat vähentyneet eri syiden johdosta niin, että viimeisin sato oli enää 3890 kg/ha.
   a) Jos viljasato vähenisi vuosittain suhteessa saman verran, niin kuinka monta prosenttia vuotuinen väheneminen olisi?
   b) Kuinka monen vuoden jälkeen sato on alle 3100 kg/ha?

E 4

102. Vuoden 2002 tammikuun alussa talletetaan tietty summa tilille, jolle maksetaan vuotuista korkoa 2,54 %, ja tasan vuoden kuluttua samansuuruinen summa toiselle tilille, jonka korkoprosentti on 3,25. Varat on tarkoitus nostaa tileiltä, kun talletukset ovat kasvaneet yhtä suuriksi. Arvioi kuukauden tarkkuudella, milloin tämä tapahtuu. Sovella koronkoronlaskuperiaatetta, muodosta yhtälö ja ratkaise se. Lähdeveroa ei oteta huomioon. [K2003, 12]

103. Hiilidioksidin määrä ilmakehässä on lisääntynyt selvästi esimerkiksi fossiilisten polttoaineiden käytön seurauksena. Vuoden 1750 hiilidioksidin määräksi on laskettu 280 ppmv (tilavuuden miljoonasosaa) ja vastaava luku vuonna 2000 oli 370 ppmv. Kuinka monta prosenttia on ollut vuotuinen CO_2-lisäys, jos kasvun ajatellaan olevan yhtä monta prosenttia joka vuosi? Mikä on hiilidioksidipitoisuus tämän mallin mukaan vuonna 2100?

104. Kaupunki on asettanut opetusvirastolle säästötavoitteen, jonka mukaan vuosittaisia kokonaiskuluja on pienennettävä 20 %. Tavoitteeseen pyritään leikkaamalla budjettia seuraavien viiden vuoden aikana joka vuosi yhtä monta prosenttia. Mikä on asetettava vuotuiseksi tavoitteeksi?

105. Itämeren silakoiden dioksiinipitoisuutta pidetään haitallisen korkeana. Tämän vuoksi silakoiden syömiselle on asetettu suositusmäärät. Itämeren alueen valtioiden tavoitteena on vähentää dioksiinipäästöjä seuraavien vuosien aikana. Jos dioksiinipäästöt olisi puolitettava 15 vuoden aikana, kuinka suuri olisi vuotuisen vähennyksen oltava?

106. Eräällä merialueella valon määrä 50 metrin syvyydessä oli vain 5 % pinnan valon määrästä. Kuinka syvälle on mentävä, jotta valon määrä jää alle yhden prosentin pintavalon määrästä, kun valon määrän voidaan olettaa vähenevän aina metrin matkalla keskimäärin yhtä monta prosenttia?

107. Videokameran hinta on laskenut vuosittain 12 %, ja vuonna 2000 kamera maksoi 4200 mk. Mikä oli sen hinta kolme vuotta aiemmin vuonna 1997? Jos hintakehitys jatkuu samanlaisena, kuinka paljon kamera maksaa vuonna 2004, jolloin rahayksikkönä on euro (1 € = 5,94573 mk)? [S2002, 8]

108. Hessu harrastaa pikajuoksua. Harjoituskauden alussa hänen aikansa sadalla metrillä on 15,50 s. Kauden edetessä hänen aikansa paranee joka viikko keskimäärin 3 %. Kuinka monennella harjoitusviikolla Hessun aika alittaa 12,50 s?

109. Määrittämällä Äänisen rannoilla tehtyjen hautalöytöjen luiden ikä radioaktiivisen hiili-isotoopin C-14 pitoisuuden avulla on selvitetty, että alueella on ollut asutusta jo 7500 vuotta sitten.
    a) Kuinka monta prosenttia luiden radioaktiivisen hiilen määrä on vähentynyt tänä aikana, kun eliön kuoltua hiilen määrä puoliintuu 5730 vuodessa?
    b) Kuinka monta vuotta tarvitaan lisää, jotta radioaktiivisen hiilen määrä on alentunut 30 prosenttiin alkuperäisestä arvosta? [K2004, 12]

110. Pieneläinklinikassa käytetään kerta-annoksena annettavaa nukutusainetta, jonka määrä elimistössä vähenee eksponentiaalisesti siten, että kolmen tunnin kuluttua aineesta on enää puolet jäljellä. Leikkauksen ajan on nukutusainetta elimistössä oltava vähintään 23 mg eläimen kutakin painokiloa kohti. Kuinka suuri määrä nukutusainetta on vähintään annettava 20 kg painavalle koiralle leikkausta varten, kun leikkauksen on arvioitu kestävän 1 h 15 min? [K2001, 8]

111. Teollisuuslaitoksen on vähennettävä vuotuisia päästöjään kolmen seuraavan vuoden aikana yhteensä 28 %.
   a) Päästäänkö tavoitteeseen, jos päästöjä vähennetään 9,0 % vuosittain?
   b) Kuinka paljon päästöjä pistäisi vähintään vuosittain pienentää, jotta tavoitteeseen päästäisiin?

112. Lääkeaineen pitoisuus puoliintuu elimistössä yksilöllisesti vaihdellen 15–18 tunnissa. Lääkityksen päätyttyä aineen voidaan katsoa poistuvan elimistöstä ajassa, joka on viisi kertaa puoliintumisaika. Kuinka monta prosenttia lääkeainetta on tuolloin kuitenkin vielä jäljellä? Kuinka monta tuntia lääkityksen jälkeen on odotettava, jotta 99 % lääkeaineesta on poistunut elimistöstä? [S2004, 12]

113. Kahden lähekkäisen virkistäytymispaikan kävijämääriä seurattiin kesäkauden ajan. Vimpulan keskimääräinen kävijämäärä oli kesän alussa 200 asiakasta päivässä mutta alkoi kasvaa päivittäin 10 %. Telmelän keskimääräinen kävijämäärä kesän alussa oli 460 asiakasta päivässä. Vimpulan vauhtipyörä oli kesän uutuus, joten Telmelän kävijämäärä väheni päivittäin 5 %. Kuinka monentena päivänä Vimpulassa kävi enemmän ihmisiä päivässä kuin Telmelässä?

114. Tällä hetkellä suurin osa sähköstä tuotetaan epäekologisilla menetelmillä, kuten öljyn, kivihiilen ja ydinvoiman avulla. Oletetaan, että näin tuotetun sähkön hinta on 0,12 snt/kWh. Koska mainitut energianlähteet eivät uusiudu, vaan niiden määrä maapallolla vähenee, myös niiden avulla tuotetun sähkön hinta nousee. Arvioidaan hinnannousuksi keskimäärin 2 % vuodessa. Aurinko-, tuuli- ja vesivoiman avulla tuotetun sähkön hinta on vielä korkea, mutta tekniikan kehittyessä se laskee. Oletetaan tämänhetkiseksi hinnaksi 0,28 snt/kWh. Hinnan voidaan arvioida laskevan keskimäärin 4 % vuodessa. Missä ajassa ekoenergian hinta laskee samalle tasolle perinteisten energiamuotojen kanssa?

115. Lasten vaatteet ovat Englannissa 23 % EU-keskihintatasoa halvempia. Islannissa ne ovat 51 % kalliimpia EU:n keskiarvoon verrattuna. Jos hinnat Englannissa nousisivat 2 % vuodessa ja Islannissa laskisivat saman verran vuodessa, kuinka pitkän ajan kuluttua näiden maiden hintataso olisi sama?

4.2 Lukujonot ja summat

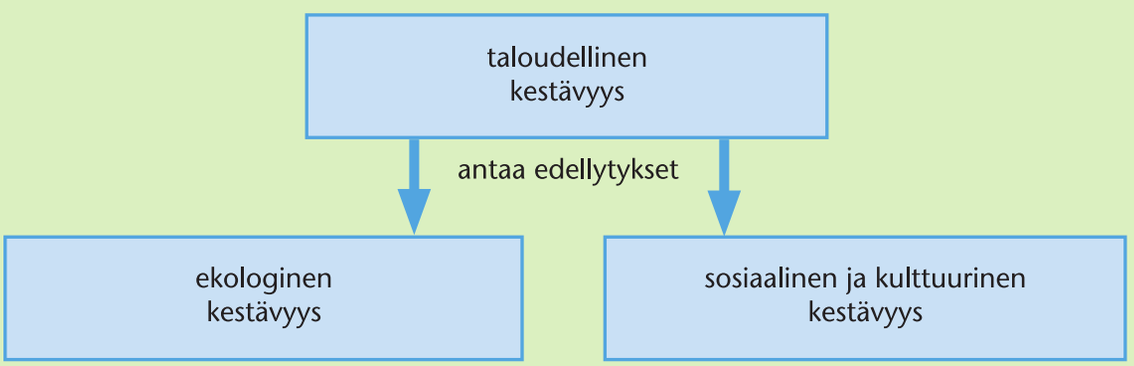
INFO

Eri valtioiden nopea taloudellinen kehitys vaatii veronsa: tänä päivänä monia luonnonvaroja kulutetaan enemmän ja nopeammin kuin luonto pystyy uusiutumaan. Jotta erilaisia luonnonvaroja jäisi jäljelle myös tulevia sukupolvia ajatellen, on jokaisen syytä tarkastella kulutustottumuksiaan myös kestävän kehityksen näkökulmasta.

Kun taloudellinen ja sosiaalinen kehitys ovat sopusoinnussa ekologisten lainalaisuuksien kanssa, puhutaan kestävästä kehityksestä.

- **Taloudellinen kestävyys** pyrkii takaamaan luonnonvarojen riittävyyden.
- **Ekologinen kestävyys** pyrkii säilyttämään luonnon monimuotoisuuden ja ekosysteemin toimivuuden.
- **Sosiaalisen ja kulttuurisen kestävyyden** tarkoituksena on taata hyvinvoinnin edellytysten siirtyminen sukupolvelta toiselle.

Kestävän kehityksen avulla pyritään elinkelpoiseen elinympäristöön myös tulevaisuudessa niin taloudelliselta, ekologiselta, sosiaaliselta kuin kulttuuriseltakin kannalta.



ESIMERKKI 1

Ympäristön säästämiseksi jätteitä tulisi kierrättää mahdollisimman tehokkaasti. Vuonna 1991 Suomessa otettiin talteen 455 000 tonnia jätepaperia. Vuonna 2003 vastaava luku oli 749 000 tonnia. Jos kerätyn paperin määrä olisi kasvanut aina yhtä monella tonnilla vuosittain, niin

a) kuinka monta tonnia vuosittainen kasvu olisi ollut
b) kuinka paljon paperia kerättäisiin tämän mukaan vuonna 2010
c) kuinka paljon paperia olisi kerätty talteen yhteensä vuosina 1991–2010?

RATKAISU

Aritmeettinen lukujono

- peräkkäisten jäsenten erotus (d) aina vakio
- yleinen jäsen $a_n = a_1 + (n-1)d$
- aritmeettinen summa $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$

a) Jos kerätyn paperin määrä kasvaa aina yhtä monella tonnilla vuosittain, niin vuosittaiset keräysmäärät muodostavat aritmeettisen lukujonon.

Tarkasteltava aikaväli on 1991–2003 eli 13 vuotta.

- Lukujonon jäsenten määrä on $n = 13$.
- Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 455\,000$ (tonnia) ja viimeinen jäsen $a_{13} = 749\,000$ (tonnia).

Sijoitetaan luvut aritmeettisen lukujonon yleisen jäsenen kaavaan ja ratkaistaan erotusvakio d.

$$749\,000 = 455\,000 + (13-1) \cdot d$$
$$294\,000 = 12d$$
$$12d = 294\,000 \quad | : 12$$
$$d = 24\,500$$

Kerätyn paperin määrä kasvaisi 24 500 tonnia vuodessa.

b) Vuoden 2010 keräysmäärä on lukujonon 20. jäsen.

$$a_{20} = 455\,000 + (20-1) \cdot 24\,500$$
$$= 920\,500$$

Vuonna 2010 paperia kerättäisiin 920 500 tonnia.

c) Lasketaan kerätyn paperin määrä vuosina 1990–2010 aritmeettisen summan kaavalla.

$$S_{20} = 20 \cdot \frac{455\,000 + 920\,500}{2} = 13\,755\,000$$

Paperia kerättäisiin yhteensä 13 755 000 tonnia.

VASTAUS

a) 24 500 tonnia b) 920 500 tonnia c) 13 755 000 tonnia

ESIMERKKI 2

Koulutus on edellytys jokaisen lapsen ja jokaisen yhteiskunnan kehitykselle. Karkeasti arvioiden 120 miljoona lasta eri puolilla maailmaa jää ilman koulutusta. ”Maailman tytöt kouluun!” on Suomen UNICEFin toteuttama keräysohjelma, jonka tavoitteena on luoda vuoteen 2007 mennessä vähintään 80 000 oppilaalle mahdollisuus peruskoulutukseen. Jos tämän jälkeen vuosittain perustettujen koulutuspaikkojen määrä kasvaisi aina 25 000:lla, niin kuinka monen vuoden kuluttua koulutuspaikkoja olisi perustettu yhteensä 120 miljoonaa?

RATKAISU

Vuonna 2007 koulutuspaikkojen määrä on 80 000. Koulutuspaikat lisääntyvät tämän jälkeen vuosittain 25 000:lla, joten ne muodostavat aritmeettisen lukujonon 80 000, 105 000, 130 000, 155 000, …

Lukujonon erotusvakio $d = 25\,000$.

Merkitään kysyttyä vuosien määrää kirjaimella n. Koulutuspaikkojen määrä on n vuoden kuluttua

$$\begin{aligned} a_n &= 80000 + (n-1)\cdot 25000 \\ &= 80000 + 25000n - 25000 \\ &= 55000 + 25000n \end{aligned}$$

Kun koulutuspaikat lasketaan yhteen kaikkien n vuoden ajalta, niiden summan tulisi olla 120 miljoonaa.

$$\begin{aligned} n\cdot\frac{80000 + (55000 + 25000n)}{2} &= 120000000 \\ n\cdot\frac{135000 + 25000n}{2} &= 120000000 \\ n\cdot(67500 + 12500n) &= 120000000 \\ 12500n^2 + 67500n - 120000000 &= 0 \qquad \big| : 12500 \\ n^2 + 5{,}4n - 9600 &= 0 \\ n &= \frac{-5{,}4 \pm \sqrt{5{,}4^2 - 4\cdot 1\cdot(-9600)}}{2\cdot 1} \\ n &= \frac{-5{,}4 \pm \sqrt{38429{,}16}}{2} \\ n &= 95{,}316\ldots \text{ tai } n = -100{,}716\ldots \end{aligned}$$

Koska vuosien määrän n on oltava positiivinen, $n = 95{,}316\ldots$ Tavoitteen saavuttamiseen menee yli 95 vuotta.

VASTAUS

96 vuoden kuluttua

ESIMERKKI 3

Luonnon monimuotoisuus on rikkaus, jota pitää suojella. Maapallolla elää arviolta 14 miljoonaa erilaista lajia, mutta vain 1,7 miljoonaa lajia on tieteellisesti kuvattu. Oletetaan, että tieteellisesti kuvattujen lajien määrä kasvaisi 5 % vuosittain.

a) Esitä kuvattujen lajien määrä geometrisen lukujonon yleisen jäsenen avulla n vuoden kuluttua. Laske sen avulla, kuinka paljon lajeja olisi kuvattu tieteellisesti 12 vuoden kuluttua.

b) Kuinka monta vuotta tällä vauhdilla kuluisi, jotta kaikki 14 miljoonaa lajia olisi kuvattu tieteellisesti?

RATKAISU

a) Geometrisen lukujonon suhdeluku $q = 1{,}05$.

Jonon ensimmäinen jäsen on kuvattujen lajien määrä yhden vuoden kuluttua eli

$$a_1 = 1{,}05 \cdot 1{,}7.$$

Jonon yleinen jäsen on muotoa

$$\begin{aligned} a_n &= 1{,}05 \cdot 1{,}7 \cdot 1{,}05^{n-1} \\ &= 1{,}7 \cdot 1{,}05^n \end{aligned}$$

samankantaiset potenssit
$a^n \cdot a^m = a^{nm}$

Kahdentoista vuoden kuluttua tieteellisesti kuvattuja lajeja olisi

$$a_{12} = 1{,}7 \cdot 1{,}05^{12} = 3{,}052... \approx 3{,}1 \text{ (miljoonaa)}.$$

b) Lasketaan, kuinka mones jäsen on 14 miljoonaa.

$$\begin{aligned} 1{,}7 \cdot 1{,}05^n &= 14 && \big| : 1{,}7 \\ 1{,}05^n &= \frac{14}{1{,}7} \\ \lg 1{,}05^n &= \lg \frac{14}{1{,}7} \\ n \lg 1{,}05 &= \lg \frac{14}{1{,}7} && \big| : \lg 1{,}05 \\ n &= \frac{\lg \frac{14}{1{,}7}}{\lg 1{,}05} \\ n &= 43{,}21... \approx 43 \end{aligned}$$

Kaikki lajit olisi tieteellisesti kuvattu 43. vuoden kuluttua.

VASTAUS

a) 3,1 miljoonaa lajia b) 43 vuotta

Geometrinen lukujono

- peräkkäisten jäsenten suhde (q) aina vakio
- yleinen jäsen $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
- geometrinen summa $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

ESIMERKKI 4

Öljyn käyttö energianlähteenä on tyypillinen esimerkki kertakäyttöisestä, uusiutumattomasta luonnonvarasta. Vuonna 1900 maailmassa käytettiin öljyä päivässä noin 730 000 barrelia (1 barreli = 0,1589873 m^3). Jos käytetyn öljyn määrä olisi kasvanut 10,8 % vuosittain, minä vuonna öljyä olisi käytetty yhteensä yli 800 miljoonaa barrelia?

RATKAISU

Öljyn vuosittaiset käyttömäärät muodostavat geometrisen lukujonon. Merkitään lukujonon suhdelukua kirjaimella q. Lukujonon ensimmäinen jäsen on 730 000 (barrelia).

Muodostetaan yhtälö summakaavan avulla.

$$730000 \cdot \frac{1-1{,}108^n}{1-1{,}108} = 800000000 \quad \big| : 730000$$

$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

$$\frac{1-1{,}108^n}{-0{,}108} = 1095{,}89... \quad \big| \cdot (-0{,}108)$$

$$1-1{,}108^n = -118{,}35...$$

$$-1{,}108^n = -119{,}35... \quad \big| \cdot (-1)$$

Koska negatiivisesta luvusta ei voi ottaa logaritmia, kerrotaan luvulla –1.

$$1{,}108^n = 119{,}35...$$

$$\lg 1{,}108^n = \lg 119{,}35...$$

$$n \cdot \lg 1{,}108 = \lg 119{,}35... \quad \big| : \lg 1{,}108$$

$$n = \frac{\lg 119{,}35...}{\lg 1{,}108}$$

$$n = 46{,}62...$$

$$n \approx 47$$

Käytetyn öljyn määrä ylitti 800 miljoonan barrelin rajan vuonna 1900 + 47 = 1947.

VASTAUS

vuonna 1947

ESIMERKKI 5

Suomen valtion lisäksi ulkomaan kehitysapua antavat kirkko sekä monet hyväntekeväisyysjärjestöt. Erään tällaisen järjestön rahastojen arvo oli vuoden 2005 lopussa noin 15 miljoonaa euroa. Rahastojen arvo nousee joka vuosi tuottojen sekä lahjoitusten vuoksi keskimäärin 5 %. Toisaalta järjestö lahjoittaa useille Aasian sekä Afrikan maille vuosittain aina vuoden lopussa miljoona euroa. Lahjoitusta ei tehdä, jos rahaston arvo on edellisen vuoden lopussa alle 12 miljoonan. Määritä rahaston arvoa (vuoden lopussa) esittävän jonon rekursiosääntö ja tutki sen avulla, milloin seuraavan kerran lahjoitus jätetään tekemättä.

RATKAISU

Jonon ensimmäinen jäsen a_1 on rahaston arvo vuoden 2005 lopussa eli $a_1 = 15$ (miljoonaa €).

Koska seuraavan vuoden aikana rahaston arvo kasvaa 5 %, sen arvo 1,05-kertaistuu. Vuoden lopussa summasta vähennetään yksi miljoona. Toinen jäsen on näin ollen

$$a_2 = 1{,}05 \cdot a_1 - 1 = 1{,}05 \cdot 15 - 1 = 14{,}75 \text{ (miljoonaa €)}.$$

Jonon yleinen jäsen a_n lasketaan siis kertomalla edellinen jäsen a_{n-1} luvulla 1,05 ja vähentämällä tulosta luku 1. Rekursiosääntö on voimassa toisesta jäsenestä alkaen:

$$a_n = 1{,}05 \cdot a_{n-1} - 1,\ a_1 = 15 \text{ ja } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Tutkitaan jonon jäseniä taulukon avulla.

Vuosi	n	Rahaston arvo vuoden lopussa a_n (miljoonaa €)
2007	3	$a_3 = 1{,}05 \cdot 14{,}75 - 1 = 14{,}48\ldots$
2008	4	$a_4 = 1{,}05 \cdot 14{,}4875 - 1 = 14{,}21\ldots$
2009	5	$a_5 = 1{,}05 \cdot 14{,}21\ldots - 1 = 13{,}92\ldots$
2010	6	$a_6 = 1{,}05 \cdot 13{,}92\ldots - 1 = 13{,}61\ldots$
2011	7	$a_7 = 1{,}05 \cdot 13{,}61\ldots - 1 = 13{,}29\ldots$
2012	8	$a_8 = 1{,}05 \cdot 13{,}29\ldots - 1 = 12{,}96\ldots$
2013	9	$a_9 = 1{,}05 \cdot 12{,}96\ldots - 1 = 12{,}61\ldots$
2014	10	$a_{10} = 1{,}05 \cdot 12{,}61\ldots - 1 = 12{,}24\ldots$
2015	11	$a_{11} = 1{,}05 \cdot 12{,}24\ldots - 1 = 11{,}85\ldots$

Koska vuoden 2015 lopussa rahaston arvo on alle 12 miljoonaa, lahjoitusta ei tehdä vuonna 2016.

VASTAUS vuonna 2016

Tehtäviä

E 1

116. Sallalla on 460 CD-levyä. Hän päättää kuunnella ne kaikki. Ensimmäisellä viikolla Salla ehtii kuunnella 3 levyä. Kun aikaa on kulunut 15 viikkoa, on levyjä kuunneltu yhteensä 255 kpl. Eri viikkoina kuunneltujen levyjen määrät muodostavat aritmeettisen jonon. Laske
a) mikä on kahden peräkkäisen viikon levymäärien ero
b) kuinka monta levyä Salla on kuunnellut 15. viikolla.

E 2

117. Levykauppa on tilannut suositun yhtyeen uutuuslevyä 750 kappaletta. Levyjä myydään ensimmäisellä viikolla 120 kappaletta. Levyn myynti laskee joka viikko 10 levyllä. Kuinka kauan kauppiaan levyvarasto riittää?

E 3

118. Yrityksen liikevoitto vuonna 2005 oli 250 000 €. Yritys on asettanut tavoitteekseen nostaa voittoa joka vuosi 15 %. Vuotuiset voitot muodostavat geometrisen jonon. Määritä jonon yleinen jäsen ja laske sen avulla
a) yrityksen liikevoitto vuonna 2012
b) minä vuonna voitto ylittää 2,0 miljoonaa euroa.

E 4

119. Liisa on päättänyt lahjoittaa jokaiselle kummilapselleen rahasumman seuraavasti: Kun lapsi täyttää yhden vuoden, hän lahjoittaa lapselle 400 €. Jokaisena syntymäpäivänä hän korottaa lahjoitussummaa 50 %. Viimeisen lahjoituksen hän tekee sinä vuonna, jona kaikkien lahjoitusten yhteissumma ylittää 10 000 €. Kuinka paljon lapsi sinä vuonna täyttää?

E 5

120. Työtuomioistuimessa oli vuoden alussa vireillä 95 kannetta. Joka kuukausi määrä kasvoi 10 %, mutta vastaavasti ratkaistiin myös 13 kannetta. Kuvaa kanteiden määristä muodostuvaa jonoa rekursiivisesti.

121. Kuinka monta prosenttia suurempi on aritmeettisen lukujonon 2, 4, 6, 8, …
999 ensimmäisen termin summa kuin sen 888 ensimmäisen termin summa? [K2002, 4]

122. Lukujonon ensimmäinen termi on 4 ja viides 1. Määritä jonon toinen, kolmas, neljäs ja kymmenes termi, kun jono on
a) aritmeettinen b) geometrinen. [K2003, 10]

123. Geometrisen jonon suhdeluku on 4 ja kymmenen ensimmäisen termin summa 3 844 775. Määritä jonon ensimmäinen termi. Mikä on jonon kymmenes termi? [S2003, 7]

124. Muodosta geometrisen jonon $\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, \ldots$ n:n ensimmäisen termin summa. Ratkaise summalauseketta käyttäen, mistä n:n arvosta alkaen summa ylittää miljoonan. [S2004, 6]

125. Ihmisen toiminnan seurauksena maapallon keskilämpötila on kohonnut 0,6 °C kuluneen 140 vuoden aikana. Helsingin keskilämpötilaksi arvioidaan nykyisin 6,0 °C. Tarkastele Helsingin keskilämpötilan kehittymistä mallintamalla lämpenemistä aritmeettisen jonon avulla. Laske mallin avulla, kuinka monen vuoden kuluttua Helsingin keskilämpötila ylittää 10,0 °C.

126. Kesämökkirakentaminen on vähentynyt merkittävästi 1990-luvun alkuun verrattuna. 1990-luvun alussa valmistui vuosittain 8000 uutta mökkiä, viime vuosina enää noin puolet tästä. Suomessa oli vuoden 2004 lopussa 469 400 kesämökkiä. Jos mökkien määrä lisääntyy vuosittain 4100:lla, niin
a) kuinka monta kesämökkiä on vuonna 2015
b) minä vuonna mökkien määrä ylittää 600 000?

127. Suomessa DVD-tallenteiden markkinat olivat 81 miljoonaa euroa vuonna 2003. Oletetaan, että markkinat ovat kasvaneet vuosittain prosentteina saman verran. Laske
a) vuotuinen kasvuprosentti, jos vuonna 2010 markkinoiden arvioidaan olevan 141 miljoonaa euroa
b) markkinoiden arvo vuonna 2001.

128. Iiro ottaa 9000 euron pankkilainan auton hankintaan. Lainaajaksi sovitaan 3 vuotta ja lainaa lyhennetään yhtä suurella summalla joka kuukausi. Lainan vuosikorko on 3,6 %, ja lyhennyksen yhteydessä maksetaan aina kuukauden aikana kertyneet korot. Kuinka paljon lainasta maksetaan yhteensä korkoa?

129. Kaivosyhtiö louhi vuoden ensimmäisen kuukauden aikana 14 tonnia malmia. Tuotantoa tehostetaan nostamalla malmintuotannon määrää 5 % joka kuukausi loppuvuoden ajan. Kuinka paljon kyseisen vuoden aikana saadaan malmia?

130. Kooltaan pieneneviä kuutioita pinotaan päällekkäin. Ensimmäisen kuution särmä on tasan yksi metri, ja muiden kuutioiden särmät ovat pituudeltaan aina puolet alla olevan kuution särmästä.
a) Määritä kolmen alimman kuution ja n:nnen kuution särmän pituus.
b) Kuinka korkea on pino, jossa on 10 ensimmäistä kuutiota? Laske taulukkoon pinon korkeuden arvot, kun kuutioita on 11, 12, 13 ja 14. Jos ajatellaan kuutioiden lukumäärän kasvavan rajatta, niin mitä lukua pinon korkeus näyttää lähestyvän? [K2001, 9]

131. Eräältä kenialaiselta alueelta norsut hävisivät jo 1800-luvun lopulla salametsästyksen vuoksi. Alueesta tehtiin 1900-luvun loppupuolella suojelualue, lähinnä monipuolisen linnuston vuoksi. Alueelle istutettiin lisäksi 45 norsua. Norsupopulaation koko noudatti mallia

$$a_n = a_{n-1}(1{,}5 - 0{,}0075a_{n-1}),\ a_1 = 45,\ n = 2,3,4,...$$

jossa n on vuosia istutuksesta. Tutki populaation kehitystä 15 vuoden ajan. Mitä populaatiolle näyttäisi tapahtuvan?

132. Uutta pesukonemallia Suomeen tuova yritys sai joulukuussa 2000 myydyksi 470 pesukonetta. Yritys sai mainostajalta tarjouksen, jossa luvattiin mainostamisen lisäävän myyntiä vuoden 2001 alusta lähtien 25 % edelliseen kuukauteen verrattuna joka kuukausi kahden vuoden ajan.
a) Kuinka monta pesukonetta yritys myisi tarjouksen mukaan vuoden 2001 kesäkuussa?
b) Kuinka monta konetta myynti olisi koko kahden vuoden aikana? [K2002, 12]

5 Työvälineitä III – Suora ja paraabeli

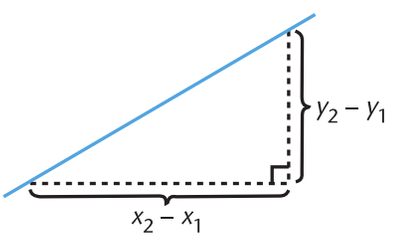
Suora

Suoran yhtälö esitetään tavallisesti ratkaistussa muodossa $y = kx + b$. Tästä muodosta voidaan nähdä suoran kulmakerroin k. Lisäksi ratkaistusta muodosta voidaan päätellä, että suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, b)$.

1. Kulmakerroin

Suoran kulmakerroin k voidaan laskea, kun tunnetaan kaksi suoran pistettä (x_1, y_1) ja (x_2, y_2).

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

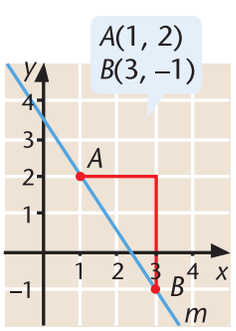


Esimerkiksi pisteiden $(-1, 5)$ ja $(4, -5)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{5 - (-5)}{-1 - 4} = \frac{10}{-5} = -2.$$

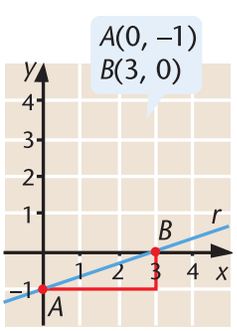
Valitaan $(x_2, y_2) = (-1, 5)$ ja $(x_1, y_1) = (4, -5)$.

Kulmakertoimesta voidaan päätellä, onko suora nouseva vai laskeva. Kulmakerroin vaikuttaa myös suoran jyrkkyyteen: mitä suurempi kulmakertoimen itseisarvo on, sitä jyrkemmin suora nousee tai laskee.



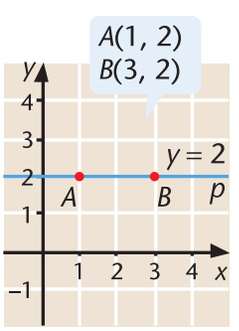
$k_m = \frac{-1-2}{3-1} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$

$k < 0$, suora on laskeva



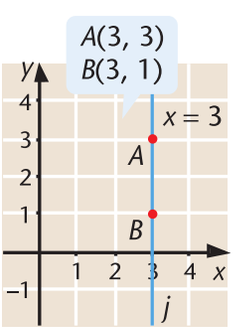
$k_r = \frac{0-(-1)}{3-0} = \frac{1}{3}$

$k > 0$, suora on nouseva



$k_p = \frac{2-2}{3-1} = \frac{0}{2} = 0$

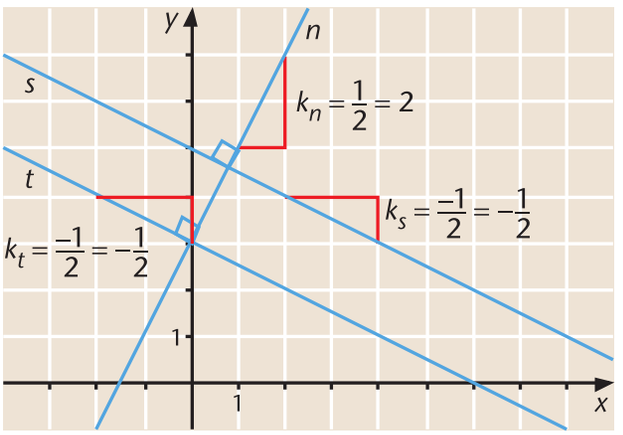
$k = 0$, suora on x-akselin suuntainen



$k_j = \frac{3-1}{3-3} = \frac{2}{0}$

Kulmakerrointa ei ole määritelty.

Kulmakertoimien avulla voidaan myös päätellä, ovatko kaksi suoraa yhdensuuntaiset tai ovatko suorat kohtisuorassa toisiaan vastaan.



Suorat *s* ja *t* ovat yhdensuuntaisia, kun kulmakertoimet ovat samat eli $k_s = k_t$.

Suorat *s* ja *n* ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kun kulmakertoimien tulo on –1 eli $k_s \cdot k_n = -1$.

2. Suoran yhtälö

Suoran yhtälö voidaan määrittää, kun tunnetaan kulmakerroin k ja yksi piste (x_0, y_0).

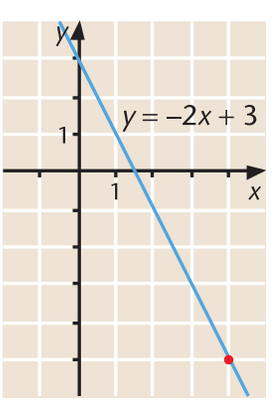
SUORAN YHTÄLÖ

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

- **Suoran kulmakerroin on *k*.**
- **Suora kulkee pisteen (x_0, y_0) kautta.**

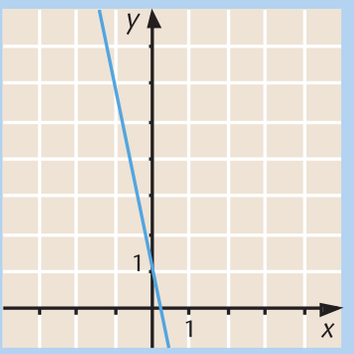
Jos suoran kulmakerroin on –2 ja se kulkee pisteen (4, –5) kautta, suoran yhtälö saadaan sijoittamalla $(x_0, y_0) = (4, -5)$ ja $k = -2$:

$$\begin{aligned} y - (-5) &= -2(x - 4) \\ y + 5 &= -2x + 8 \\ y &= -2x + 3 \end{aligned}$$



3. Suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet

Suoran ja x-akselin leikkauskohdassa y-koordinaatti on nolla. Leikkauspisteen x-koordinaattia kutsutaan suoran nollakohdaksi. Suoran ja y-akselin leikkauspisteen y-koordinaatti on sama kuin vakiotermi. Tämän näkee vain suoran yhtälön ratkaistusta muodosta.

Yleinen muoto $Ax + By + C = 0$, jossa A, B ja C ovat vakioita.	$5x + y - 1 = 0$
Ratkaistu muoto $y = kx + b$, jossa k = kulmakerroin ja b = vakiotermi.	$y = -5x + 1$ 
Kulmakerroin	-5
y-akselin leikkauskohta	Suoran vakiotermi $b = 1$. Suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 1)$.
Nollakohta	$-5x + 1 = 0$ $-5x = -1 \quad \vert : (-5)$ $x = \frac{1}{5}$ Suora leikkaa x-akselin pisteessä $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$.

4. Suorien leikkauspiste

Kahden suoran leikkauspiste on molempien yhteinen piste, joten leikkauspisteessä y-koordinaatit ovat samat. Koordinaatit lasketaan suorien yhtälöiden avulla. Leikkauspisteitä ei siis saa katsoa kuvaajasta, ellei tehtävänannossa niin mainita.

Leikkauspiste lasketaan ratkaisemalla yhtälöpari.

Esimerkiksi suorien $y = -x + 4$ ja $2x - y + 4 = 0$ leikkauspiste lasketaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} y = -x - 4 \\ 2x - y + 5 = 0. \end{cases}$$

Ratkaisussa käytetään joko sijoitus- tai eliminointimenetelmää.

Tapa 1: Sijoitusmenetelmä

Sijoitetaan $y = -x + 4$ toiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned} 2x - (-x - 4) + 5 &= 0 \\ 2x + x + 4 + 5 &= 0 \\ 3x + 9 &= 0 \\ 3x &= -9 \quad |:3 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Tapa 2: Eliminointimenetelmä

$$\begin{cases} y = -x - 4 \\ 2x - y + 5 = 0 \end{cases}$$

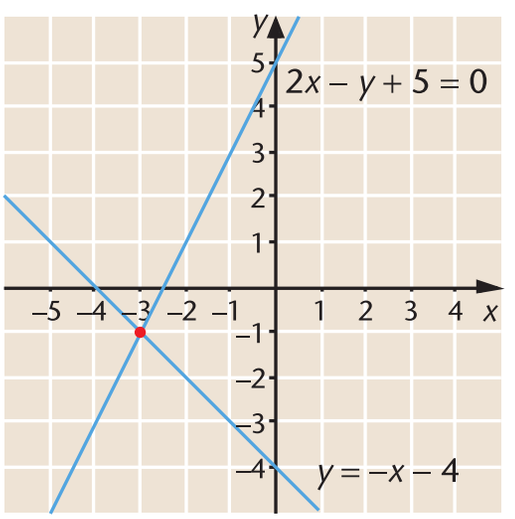
Eliminoidaan tuntematon y.

$$\begin{cases} x + y = -4 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3x &= -9 \quad |:3 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

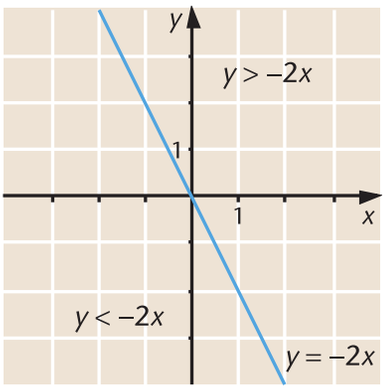
Kun $x = -3$, niin
$y = -(-3) - 4 = 3 - 4 = -1$.

Leikkauspiste on $(-3, -1)$.



5. Kahden muuttujan epäyhtälö

Esimerkiksi suora $y = -2x$ jakaa xy-tason kahteen alueeseen, jotka voidaan ilmoittaa epäyhtälöiden avulla.



- Suoran $y = -2x$ yläpuolella sijaitseville pisteille on voimassa ehto

  $y > -2x$.

- Suoran $y = -2x$ alapuolella sijaitseville pisteille on voimassa ehto

  $y < -2x$.

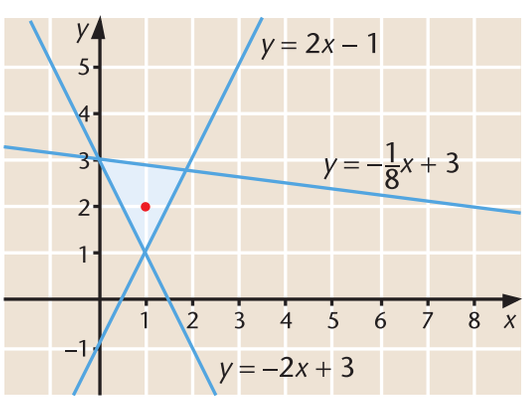
Jos samanaikaisesti tarkastellaan useampia epäyhtälöitä, puhutaan epäyhtälöryhmästä. Epäyhtälöryhmän ratkaisuna on se tasoalue, jossa kaikki epäyhtälöt toteutuvat samanaikaisesti.

Esimerkiksi epäyhtälöryhmän $\begin{cases} y \geq -2x + 3 \\ y \leq -\frac{1}{8}x + 3 \\ y \geq 2x - 1 \end{cases}$ ratkaisuna on kuvan tasoalue.

Epäyhtälöryhmän ratkaiseminen

1. Piirrä tasoaluetta rajoittavat suorat.
2. Päättele epäyhtälöiden avulla oikea tasoalue.
3. Tarkista ratkaisu valitsemalla tasoalueesta piste. Pisteen koordinaattien on toteutettava kaikki epäyhtälöt.

- $y \geq -2x + 3$: ratkaisuna on suoran yläpuolinen alue
- $y \leq -\frac{1}{8}x + 3$: ratkaisuna on suoran alapuolinen alue
- $y \geq 2x - 1$: ratkaisuna on suoran yläpuolinen alue



Valitaan tasoalueesta tarkistuspiste $(1, 2)$:

$2 \geq -2 \cdot 1 + 3 = 1$ tosi

$2 \leq -\frac{1}{8} \cdot 1 + 3 = 2\frac{7}{8}$ tosi

$2 \geq 2 \cdot 1 - 1 = 1$ tosi

Koska tarkistuspisteen koordinaatit toteuttavat kaikki epäyhtälöt, ratkaisuna on se suorien rajoittama tasoalue, jossa piste $(1, 2)$ sijaitsee.

Paraabeli

Paraabelin yhtälö voidaan esittää muodossa

$$y = ax^2 + bx + c,$$

jossa kertoimet $a \neq 0$, b ja c ovat vakioita.

1. Paraabelin yhtälön määrittäminen

Yhtälön kertoimet voidaan määrittää, jos tunnetaan kolme paraabelin pistettä.

Esimerkiksi pisteiden (1, 0), (2, 9) ja (–1, 12) kautta kulkevan paraabelin yhtälö saadaan määritettyä **yhtälöryhmän** avulla. Sijoitetaan pisteet paraabelin yhtälöön $y = ax^2 + bx + c$:

$$\begin{cases} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 9 \\ a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 12 \end{cases} \quad \text{eli} \quad \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ a - b + c = 12 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaiseminen

1. Muodosta kaksi yhtälöparia ja eliminoi niistä sama tuntematon.
2. Muodosta eliminoinnin tuloksena saaduista yhtälöistä uusi yhtälöpari ja ratkaise se.
3. Sijoita yhtälöparin ratkaisut johonkin alkuperäiseen yhtälöön ja ratkaise kolmas tuntematon.

Muodostetaan ensin kaksi erilaista yhtälöparia. Eliminoidaan kummastakin yhtälöparista **sama** tuntematon.

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - b + c = 12 \end{cases}$$

$$2a + 2c = 12$$

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 9 \\ a - b + c = 12 \quad \big| \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 9 \\ 2a - 2b + 2c = 24 \end{cases}$$

$$6a + 3c = 33$$

Muodostetaan eliminoinnin jälkeen saaduista yhtälöistä uusi yhtälöpari ja ratkaistaan tämän yhtälöparin avulla kaksi tuntematonta.

$$\begin{cases} 2a + 2c = 12 \quad \big| \cdot (-3) \\ 6a + 3c = 33 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6a - 6c = -36 \\ 6a + 3c = 33 \end{cases}$$

$$-3c = -3 \quad \big| : (-3)$$

$$c = 1$$

Kun $c = 1$,

$$\begin{aligned} 2a + 2 \cdot 1 &= 12 \\ 2a &= 10 \quad \big| : 2 \\ a &= 5 \end{aligned}$$

Sijoitetaan yhtälöparin ratkaisuna saadut arvot johonkin alkuperäisen yhtälöryhmän yhtälöön ja ratkaistaan kolmas tuntematon.

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ 5 + b + 1 &= 0 \\ b &= -6 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $a = 5$ ja $c = 1$.

Paraabelin kertoimet ovat $a = 5$, $b = -6$ ja $c = 1$. Paraabelin yhtälö on siis $y = 5x^2 - 6x + 1$.

2. Paraabelin aukeamissuunta, nollakohdat ja huippu

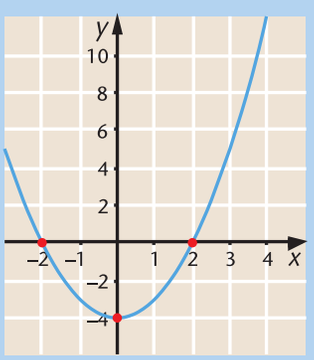
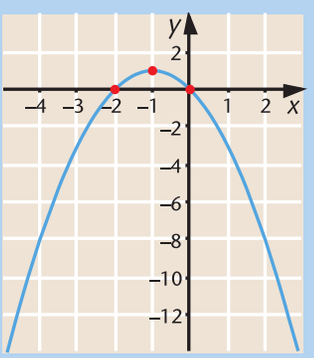
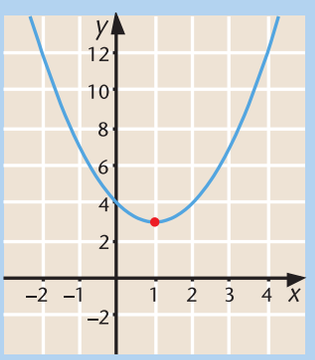
Paraabelin aukeamissuunta riippuu toisen asteen termin kertoimen merkistä. Paraabeli voi aueta joko ylöspäin tai alaspäin.

Paraabeli $y = ax^2 + bx + c$ voi leikata x-akselin enintään kahdessa pisteessä. Paraabelilla on siis enintään kaksi nollakohtaa. **Nollakohdat** lasketaan ratkaisemalla toisen asteen yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$.

Paraabelin huippu on piste, jossa kuvaajan kulkusuunta vaihtuu. Huippukohta tarkoittaa huipun x-koordinaattia. Huipun kautta voidaan piirtää paraabelin symmetria-akseli. Symmetriasta seuraa, että huipun x-koordinaatti on aina paraabelin mahdollisten nollakohtien puolivälissä.

Nollakohtien ja huipun laskeminen auttaa paraabelin piirtämisessä, jossa kannattaakin edetä seuraavasti:

1. Päättele aukeamissuunta.
2. Laske nollakohdat.
3. Laske huipun koordinaatit joko nollakohtien tai derivaatan avulla.
4. Laske muutamia muita pisteitä huipun molemmilta puolilta.

$y = ax^2 + bx + c$			
Paraabelin yhtälö	$y = x^2 - 4$	$y = -x^2 - 2x$	$y = x^2 - 2x + 4$
Aukeamis-suunta	$a = 1 > 0$, aukeamissuunta ylöspäin	$a = -1 < 0$, aukeamissuunta alaspäin	$a = 1 > 0$, aukeamissuunta ylöspäin
Nolla-kohdat	$x^2 - 4 = 0$ $x^2 = 4$ $x = 2$ tai $x = -2$ kaksi nollakohtaa	$-x^2 - 2x = 0$ $x(-x - 2) = 0$ $x = 0$ tai $x = -2$ tulon nollasääntö kaksi nollakohtaa	$x^2 - 2x + 4 = 0$ $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$ $x = \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2}$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ juurrettava negatiivinen, ei nollakohtia
Huippu-piste	Huippu sijaitsee nollakohtien puolivälissä. $x = \frac{-2 + 2}{2} = 0$ $y = 0^2 - 4 = -4$ huippupiste: (0, –4)	$x = \frac{-2 + 0}{2} = -1$ $y = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 1$ huippupiste: (–1, 1)	Nollakohtia ei ole, mutta huipussa derivaatan arvo on nolla. $y' = 2x - 2 = 0$ $2x = 2 \quad \vert : 2$ $x = 1$ $y = 1^2 - 2 \cdot 1 + 4 = 3$ huippupiste: (1, 3)
Kuvaaja			

Tehtäviä

Suora

133. Määritä suoran kulmakerroin k, kun suora kulkee pisteiden
a) $(2, -5)$ ja $(-3, 1)$ b) $(15, -64)$ ja $(3, -100)$
c) $(1, 2)$ ja $(0, 2)$ d) $(3, 5)$ ja $(3, -2)$
kautta.

134. Määritä suoran yhtälö, kun suora kulkee pisteiden
a) $(-2, 3)$ ja $(4, 9)$ b) $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ ja $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ kautta.
Ovatko suorat nousevia vai laskevia?

135. Suora s kulkee pisteen $(2, 5)$ kautta. Määritä suoran
a) kulmakerroin, kun piste $(5, -4)$ kuuluu suoralle s
b) yhtälö, kun suoran kulmakerroin on -4.

136. Suora kulkee pisteiden $(-6, -1)$ ja $(2, 3)$ kautta. Määritä suoran pisteeseen $(2, 3)$ piirretyn normaalin yhtälö.

137. Suoran t yhtälö on muotoa $10x + 2y - 8 = 0$.
a) Määritä sen suoran t kanssa yhdensuuntaisen suoran yhtälö, joka kulkee origon kautta.
b) Määritä sen suoraa t vastaan kohtisuorassa olevan suoran yhtälö, joka kulkee pisteen $(-4, 1)$ kautta.
c) Laske suoran t ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

138. Ratkaise yhtälöpari.
a) $\begin{cases} 7x + 4y = 1 \\ -5x + 4y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 5x + 1 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$

139. Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} 6x - 3y = 1 \\ 2x + 7y = 3 \end{cases}$. Mikä merkitys yhtälöparin ratkaisulla on graafisesti?

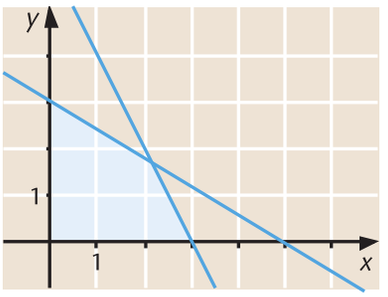
140. Suora s kulkee pisteiden $(65, 125)$ ja $(125, -55)$ kautta. Suora t on suoran s normaali, joka kulkee pisteen $(-24, 30)$ kautta.
a) Laske suorien s ja t leikkauspisteen koordinaatit.
b) Onko piste $(-246, -44)$ jommallakummalla suoralla?

141. Määritä vakio a siten, että suora $ay - (a + 10)x - 2 = 0$ kulkee pisteen $(5, 31)$ kautta. Onko suora nouseva vai laskeva?

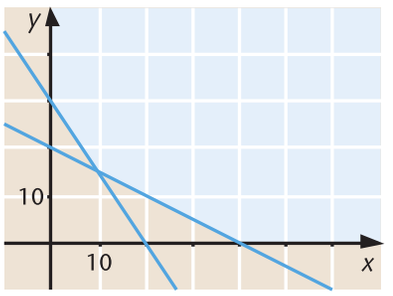
142. Laske pisteen $(1, 1)$ etäisyys suorasta $y = -0{,}5x + 4$ kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

143. Ilmoita kuvan tasoalue epäyhtälöiden avulla.

a)



b)



144. Ratkaise epäyhtälö. Kuvaa ratkaisu koordinaatistossa.
a) $9x - 3y < 6$ b) $4x + 8y > -8$

145. Ratkaise graafisesti epäyhtälöryhmä $\begin{cases} y \geq -3x + 5 \\ y \leq 2x + 5 \\ x \leq 5 \end{cases}$.

146. Epäyhtälöt $-2x - y + 4 \geq 0$, $4x + 2y \geq -10$ ja $0 \leq y \leq 3$ rajaavat tasoalueen. Millainen geometrinen kuvio tasoalue on? Laske sen ala.

Paraabeli

147. Laske paraabelin $y = 2x^2 - 3x - 9$ nollakohdat ja huippupiste.

148. Määritä paraabelin aukeamissuunta, nollakohdat sekä huipun koordinaatit.
a) $y = x^2 + 2x - 24$ b) $y = -2x^2 + 20x - 32$

149. Paraabelin huippupiste on $(3, 14)$ ja toinen nollakohta on $x = -3$.
a) Mikä on toinen nollakohta?
b) Määritä vakio a siten, että $y = ax^2 + \frac{7}{3}x + \frac{21}{2}$ on mainitun paraabelin yhtälö.

150. a) Määritä suoran $y = -3x + 6$ ja paraabelin $y = x^2 - 4x - 6$ leikkauspisteet.
b) Määritä suoran $y = -2x + 5$ ja paraabelin $y = 3x^2 - 4x + 5$ leikkauspisteet.

151. Määritä suoran $2x + y - 1 = 0$ ja paraabelin $y = -x^2 + 2x + 6$ leikkauspisteet.

152. Määritä vakio a siten, että paraabeli $y = (2a - 8)x^2 + 2x - 1$
a) aukeaa alaspäin
b) ainoastaan sivuaa x-akselia yhdessä pisteessä.

153. Paraabeli $y = ax^2 + 4x - 7$ kulkee pisteen $(1, 6)$ kautta. Laske paraabelin nollakohdat. Mihin suuntaan paraabeli aukeaa?

154. Paraabelin ja suoran leikkauspisteet ovat $(-1, 4)$ ja $(1, -6)$. Lisäksi paraabelin y-akselin leikkauskohta on $(0, -3)$. Määritä paraabelin ja suoran yhtälöt.

155. Ratkaise yhtälöryhmä.

a) $\begin{cases} -6x + 4y - z = 15 \\ 5x - 2y - 4z = 0 \\ 3x - 3y + 8z = -13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4a + 5b - c = -51 \\ -3a - 10b + 2c = 92 \\ 2a + 2b - 7c = -74 \end{cases}$

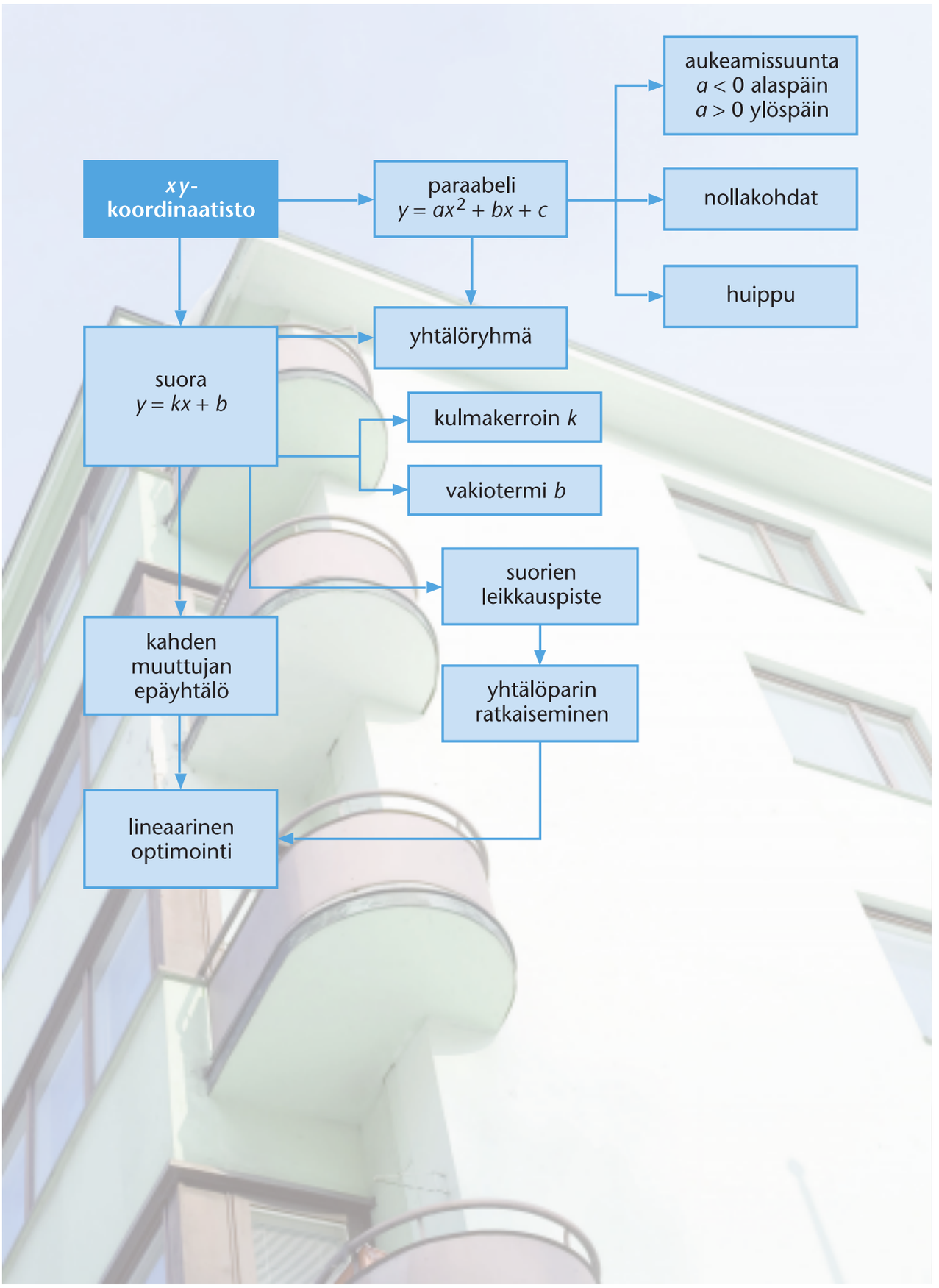
156. Ratkaise yhtälöryhmä.

a) $\begin{cases} x + y + z = 8 \\ 9x - 3y + z = 64 \\ 4(-2x - y) - 2(z - 19) = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = y + 2x - 8 \\ 2y = 3x - z + 8 \\ 3z = 2x - 3y + 14 \end{cases}$

157. Paraabeli $y = ax^2 + bx + c$ kulkee pisteiden $(0, -3)$, $(1, 0)$ ja $(-1, -8)$ kautta. Määritä paraabelin yhtälö.

158. Paraabelin g nollakohdat ovat $x = 3$ ja $x = 5$. Lisäksi $g(1) = -24$. Määritä paraabelin yhtälö.

6 Asuminen ja rakentaminen



6.1 Suora ja paraabeli matemaattisina malleina

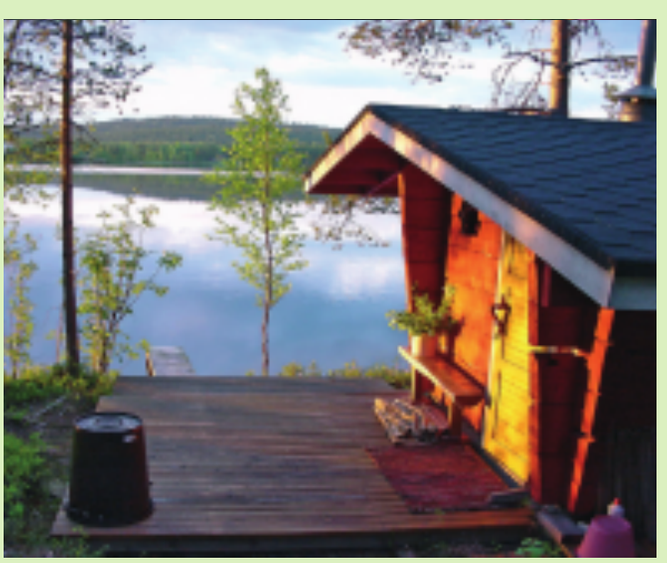
INFO

Tonttia ostaessa on hyvä selvittää tontin rakennusoikeus eli se, kuinka paljon tontille saa rakentaa. Tontin käytetty ja käyttämätön rakennusoikeus selviävät kunnan rakennusvalvonnasta. Kunnat ohjaavat alueellaan tapahtuvaa rakentamista kaavoituksella. Rakentamista varten käytetään kahta kaavaa, yleiskaavaa ja asemakaavaa.

Yleiskaavassa määritellään ne alueet, jotka on tarkoitettu vapaa-ajan asuntoihin. Kaavassa annetaan lisäksi määräyksiä rakennuspaikkojen koosta ja rakentamistavoista. Yleiskaava kertoo esimerkiksi sen, mille etäisyydelle rannasta rakennukset saa sijoittaa tai mille korkeudelle alin lattiataso on rakennettava.

Asemakaavassa määritellään alueen tuleva käyttö: mitä säilytetään, mitä saa rakentaa, mihin ja millä tavalla. Kaavassa osoitetaan esimerkiksi rakennusten sijainti, koko ja käyttötarkoitus. Maankäyttö- ja rakennuslain mukaan asemakaava on laadittava siten, että luodaan edellytykset terveelliselle, turvalliselle ja viihtyisälle elinympäristölle, palvelujen alueelliselle saatavuudelle ja liikenteen järjestämiselle. Rakennettua ympäristöä ja luonnonympäristöä on vaalittava eikä niihin liittyviä erityisiä arvoja saa hävittää.

Kaavoitettavalla alueella tai sen lähiympäristössä on oltava riittävästi puistoja tai muita virkistykseen soveltuvia alueita. Kaikkia maa-alueita ei ole välttämättä kaavoitettu. Näin on varsinkin haja-asutusalueilla. Jos kaavaa ei ole tai halutaan rakentaa kaavasta poikkeavasti, rakentamiseen tarvitaan poikkeuslupa kunnalta tai alueelliselta ympäristökeskukselta.



ESIMERKKI 1

Virtasen perhe avasi asunnon ostoa varten ASP-tilin. Tilin korko riippui lineaarisesti vuoden alimmasta saldosta. Virtasten alin saldo tammikuussa oli 5000 €, jolloin he saivat korkoa vuodelta 1,0 %. Seuraavana vuonna alin saldo oli 15 000 €, jolloin korko olikin 1,8 %.

a) Muodosta malli, joka esittää koron riippuvuutta saldosta.

b) Laske mallin avulla, kuinka suuri on tilin alimman saldon oltava vuoden alussa, jotta pankin maksama vuosikorko olisi 2,4 %.

RATKAISU

a) Koska riippuvuus on lineaarista, sitä mallinnetaan suoran avulla. Suoran yhtälön määrittämiseen tarvitaan kaksi suoran pistettä:

Alin saldo (€) x	Vuosikorko (%) y	(x, y)
5000	1	(5000, 1)
15 000	1,8	(15 000; 1,8)

Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{1{,}8 - 1}{15000 - 5000} = 0{,}00008$$

$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Määritetään suoran yhtälö kulmakertoimen ja pisteen (5000, 1) avulla:

$$y - 1 = 0{,}00008(x - 5000)$$
$$y - 1 = 0{,}00008x - 0{,}4$$
$$y = 0{,}00008x + 0{,}6$$

$y - y_0 = k(x - x_0)$

b) Vuosikorko on 2,4 %. Sijoitetaan suoran yhtälöön $y = 2{,}4$.

$$0{,}00008x + 0{,}6 = 2{,}4$$
$$0{,}00008x = 1{,}8 \quad | : 0{,}00008$$
$$x = 22500$$

Vuoden alimman saldon on siis oltava 22 500 €.

VASTAUS

a) $y = 0{,}00008x + 0{,}6$ b) 22 500 €

ESIMERKKI 2

Pekka vietti kesälomansa mökillään tai kaupunkiasunnossaan. Ruokakustannukset tänä aikana olivat yhteensä 260 €. Muut kulut olivat yhteensä 174 €. Kesämökillä ruokaan kului päivittäin keskimäärin 8 € ja kaupungissa 12 €. Muut kulut kesämökillä olivat keskimäärin 4 € päivässä ja kaupungissa 10 €. Kuinka monta lomapäivää Pekka vietti mökillään ja kuinka monta kaupungissa?

RATKAISU

Merkitään mökillä vietettyä aikaa kirjaimella x ja kaupungissa vietettyä aikaa kirjaimella y. Tarkastellaan tilannetta taulukon avulla.

	Kustannukset mökillä	**Kustannukset kaupungissa**	**Yhteensä (€)**
Ruokamenot (€)	$8x$	$12y$	260
Muut kulut (€)	$4x$	$10y$	174

Taulukon tiedoista saadaan yhtälöpari. Ratkaistaan se eliminointimenetelmällä.

$$\begin{cases} 8x + 12y = 260 \\ 4x + 10y = 174 \quad \big| \cdot (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x + 12y = 260 \\ -8x - 20y = -348 \end{cases}$$

$$-8y = -88 \quad \big| : (-8)$$

$$y = 11$$

Ratkaistaan x sijoittamalla $y = 11$ yhtälöön $4x + 10y = 175$:

$$4x + 10 \cdot 11 = 174$$

$$4x = 64 \quad \big| : 4$$

$$x = 16$$

VASTAUS: Pekka oli mökillä 16 päivää ja kaupungissa 11 päivää.

ESIMERKKI 3

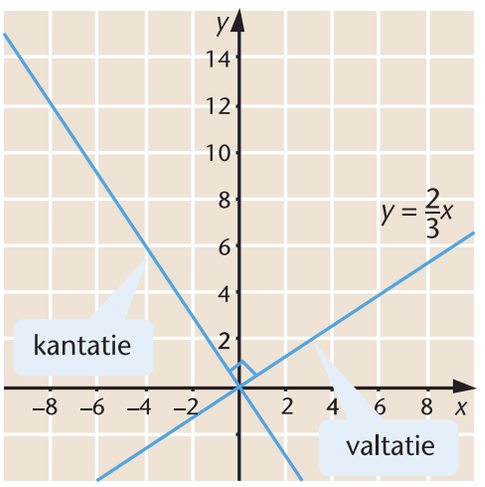
Valtatieltä, jota kuvaa kartalla suora $y = \frac{2}{3}x$, käännytään kohtisuorasti kantatielle. Kantatietä ajetaan suoran suuntaisesti, kunnes saavutaan kylätien risteykseen. Kylätietä jatketaan suoraan valtatien suuntaisesti kartan pisteeseen $(-3, 11)$, jossa kesämökki sijaitsee.

a) Määritä kantatien ja kylätien risteyksen koordinaatit, kun kartan koordinaatiston origo on valittu valtatien ja kantatien risteykseen.

b) Laske kilometrin tarkkuudella, kuinka pitkä matka ajetaan kantatietä, kun yksi yksikkö kartalla vastaa 1 km luonnossa.

RATKAISU

a) Kysytty risteys on kahden suoran leikkauspiste. Määritetään kantatietä ja kylätietä kuvaavien suorien yhtälöt.



Valtatietä kuvaavan suoran kulmakerroin on $k_v = \frac{2}{3}$.

Kantatie on kohtisuorassa valtatietä vastaan, joten sitä kuvaavan suoran kulmakertoimeksi saadaan

$$k_v \cdot k_k = -1$$

$$\frac{2}{3} \cdot k_k = -1 \qquad \Big| : \frac{2}{3}$$

$$k_k = -\frac{3}{2}$$

Lisäksi kantatie kulkee origon eli pisteen $(0, 0)$ kautta, jolloin sitä kuvaavan suoran yhtälö on

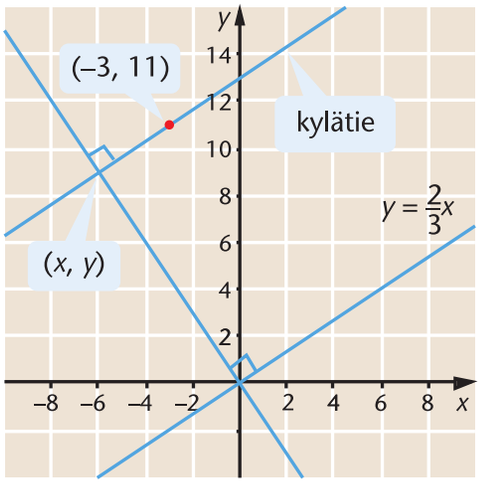
$$y - y_0 = k_k(x - x_0)$$

$$y - 0 = -\frac{3}{2}(x - 0)$$

$$y = -\frac{3}{2}x$$

Kylätie on valtatien suuntainen, joten näitä teitä kuvaavien suorien kulmakertoimet ovat samat eli $k_{\text{kylätie}} = \frac{2}{3}$.

Kylätie kulkee pisteen (–3, 11) kautta, joten sitä kuvaavan suoran yhtälö on



$$y - y_0 = k_{\text{kylätie}}(x - x_0)$$

$$y - 11 = \frac{2}{3}(x - (-3))$$

$$y - 11 = \frac{2}{3}x + 2$$

$$y = \frac{2}{3}x + 13$$

Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x \\ y = \frac{2}{3}x + 13 \end{cases}.$$

$$-\frac{3}{2}x = \frac{2}{3}x + 13$$

$$-\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}x = 13$$

$$-2\frac{1}{6}x = 13 \quad \left| : \left(-2\frac{1}{6}\right)\right.$$

$$x = -6$$

Kun $x = -6$, niin $y = -\frac{3}{2}x = -\frac{3}{2} \cdot (-6) = 9$

Risteyksen koordinaatit ovat siis $(-6, 9)$.

Kahden pisteen välinen etäisyys

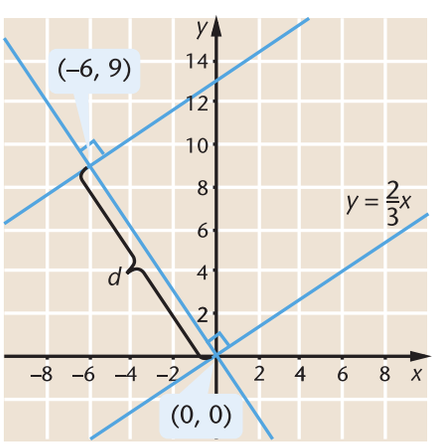
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

b) Valtatien ja kantatien risteys on pisteessä (0, 0). Kantatien ja kylätien risteys on pisteessä $(-6, 9)$. Lasketaan näiden pisteiden välinen etäisyys d.

$$d = \sqrt{(-6-0)^2 + (9-0)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 81}$$

$$= \sqrt{117} = 10{,}81... \approx 11$$



Koska yksi yksikkö vastaa 1 km luonnossa, kantatietä ajettu matka on noin 11 km.

VASTAUS a) $(-6, 9)$ b) 11 km

ESIMERKKI 4

Jalmari on päättänyt tilata puhelinliittymän kesämökilleen. Puhelinyhtiö A laskuttaa paikallispuheluista 6,5 snt/min. Puhelinyhtiö B:n vastaava taksa on 5,5 snt/min. Puhelinyhtiö A perii käyttöliittymästä kertamaksun 20 € ja perusmaksua 10 €/kk. Yhtiön B kertamaksu on 50 € ja perusmaksu 8 €/kk. Esitä molempien vaihtoehtojen kolmen lomakuukauden kustannusten y (€) riippuvuus puheajasta x (min). Kuinka paljon kolmen lomakuukauden aikana on puhuttava, jotta Jalmarin kannattaa valita yhtiö B?

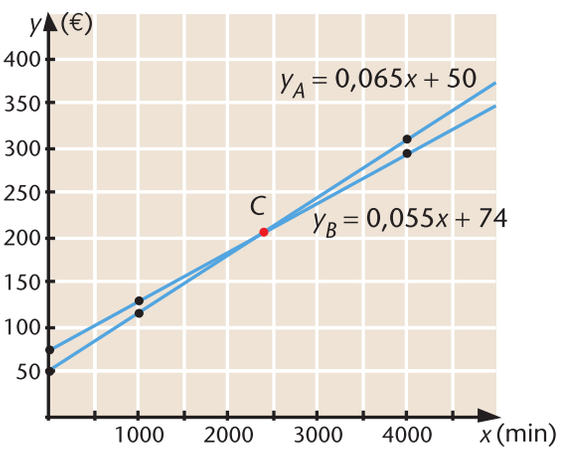
RATKAISU

Puhelinyhtiö A: Kun puhutaan kolmen kuukauden aikana x minuuttia, kustannukset euroina ovat

$$y_A = 0{,}065x + 20 + 10 \cdot 3 = 0{,}065x + 50.$$

Puhelinyhtiöllä B vastaavat kustannukset ovat

$$y_B = 0{,}055x + 50 + 8 \cdot 3 = 0{,}055x + 74.$$



Kun puhutaan vähän, on edullisempaa valita A. Vaihtoehdot ovat yhtä edulliset suorien leikkauspisteessä C, jonka jälkeen kannattaa valita puhelinyhtiö B. Ratkaistaan pisteen C x-koordinaatti yhtälöparin avulla:

$$\begin{cases} y = 0{,}065x + 50 \\ y = 0{,}055x + 74 \end{cases}$$

$$0{,}065x + 50 = 0{,}055x + 74$$

$$0{,}01x = 24 \quad | : 0{,}01$$

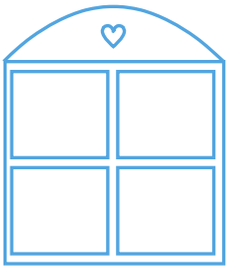
$$x = 2400$$

VASTAUS

Jos kolmen kuukauden aikana puhutaan enemmän kuin 2400 min = 40 h, kannattaa valita vaihtoehto B.

ESIMERKKI 5

Elmeri teettää puusepällä mökillensä ikkunat, joiden yläosan puinen koristekaari muodostuu mallipiirroksen mukaisesti paraabelin $y = 0{,}5x^2 + 0{,}5$ x-akselin yläpuolisesta osasta. Mallipiirroksessa yksi yksikkö vastaa 0,50 m luonnossa.



a) Laske ikkunan leveys.

b) Kuinka korkea ikkunan päällä oleva koristekaari on korkeimmalta kohdaltaan?

RATKAISU

a) Ikkunan leveyden määrää paraabelin kaari.

Lasketaan paraabelin ja x-akselin leikkauskohdat eli nollakohdat.

$$0{,}5x^2 - 0{,}5 = 0$$

$$0{,}5x^2 = 0{,}5 \qquad |:0{,}5$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

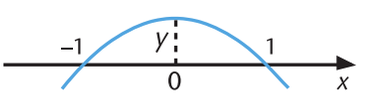
Koska nollakohdat ovat $x = 1$ tai $x = -1$, niin ikkunan leveys mallipiirroksessa on $|1 - (-1)| = 2$ yksikköä.

Ikkunan todellinen leveys on $2 \cdot 0{,}50$ m $= 1{,}0$ m.

b) Koristekaaren huippukohta on paraabelin nollakohtien puolivälissä.

Huippukohta voidaan määrittää myös derivaatan nollakohdan avulla.

Huippukohta on siis $x = \dfrac{1 + (-1)}{2} = 0$.



Korkeus huippukohdassa on

$$y = -0{,}5 \cdot 0^2 + 0{,}5 = 0{,}5 \text{ (yksikköä)}.$$

Koristekaaren todellinen korkeus on $0{,}5 \cdot 0{,}50$ m $= 0{,}25$ m.

VASTAUS

a) 1,0 m

b) 0,25 m

Tehtäviä

E 1

159. Taloyhtiön yhtiökokouksessa päätettiin, että yhtiövastike määräytyisi jatkossa kiinteän perusmaksun ja asunnon pinta-alan perusteella. Virtaset, joiden huoneiston ala on 72 m^2, joutuvat jatkossa maksamaan 191,60 €. Mäkisten huoneiston ala on 114 m^2, jolloin vastike on 267,20 €. Muodosta lineaarinen malli, joka esittää vastikkeen riippuvuutta asuinpinta-alasta. Laske mallin avulla
   a) Miettisten vastike, kun heidän kaksionsa koko on 54 m^2
   b) Lissun yksiön koko, kun vastike on 119,60 €.

E 2

160. Suodatinkahvikupissa on kofeiinia 90 mg ja energiaa 39 kJ. Pannukahvikupissa on kofeiinia 70 mg ja energiaa 18 kJ. Juodusta kahvista saatu kokonaisenergia oli 153 kJ ja kofeiinimäärä 410 mg. Laske, kuinka monta kuppia juotiin pannukahvia ja kuinka monta suodatinkahvia.

E 3

161. Leila on metsässä lenkillä. Hän kulkee pitkin voimalinjan takia tehtyä hakkuutietä. Tietä kuvaa kartalla suora $y = -2x + 10$. Hän aikoo kävellä pitkin voimalinjaa pisteeseen, josta on lyhin matka origossa sijaitsevaan asutuskeskukseen. Määritä tämän pisteen koordinaatit. Kuinka kaukana tämä piste on asutuskeskuksesta, kun yksi koordinaatiston yksikkö vastaa luonnossa yhtä kilometriä? Anna vastaus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

E 4

162. Kuntosaleissa Solakka ja Piukka on salin yhteydessä myös ohjattuja jumppatunteja. Kuntosali Solakan kanta-asiakkaaksi pääsee, jos maksaa vuosimaksun 120 €. Tämän jälkeen kuntosalikerta ja ohjattu jumppatunti ovat kumpikin 2,5 €. Samalla kadulla sijaitseva kuntosali Piukalla ei ole kanta-asiakasmaksua, vaan kuntosalista ja ohjatusta jumpasta peritään kummastakin 4,5 €. Kuinka monta kertaa vuoden aikana salilla on käytävä, jotta kannattaa valita Solakka?

E 5

163. Kaarlo käy pelaamassa sulkapalloa hallissa, jonka poikkileikkaus on paraabelin $y = -0{,}192x^2 + 8{,}16x - 81{,}9$ x-akselin yläpuolisen osan muotoinen.
   a) Kuinka korkea halli on korkeimmalta kohdaltaan?
   b) Kuinka suuri on hallin lattiapinta-ala, kun hallin pituus on 65,0 m?

164. Muovit ovat korvanneet monia materiaaleja, ja niiden kulutus ja tuotanto ovat kasvaneet voimakkaasti. Vuonna 2000 Euroopassa oli muovituotteita valmistavia yrityksiä 30 000. Oletetaan, että muovituotteita valmistavia yrityksiä olisi viisi vuotta myöhemmin 32 000 ja kasvu olisi lineaarista.
a) Määritä yritysten lukumäärää y kuvaavan suoran yhtälö, kun vuodesta 2000 on kulunut x vuotta.
b) Kuinka monta alan yritystä Euroopassa olisi vuonna 2017?

165. Erään käsityksen mukaan 172 cm pituisen ihmisen normaalipaino on noin 74 kg ja vastaavasti 188 cm pituisen normaalipaino noin 88 kg. Muodosta lineaarinen malli, joka ilmoittaa normaalipainon pituuden funktiona. Laske mallin avulla, mikä on tavoitepaino ihmiselle, jonka pituus on kaksi metriä.
[preli K2005, 8]

166. Järvellä tehtiin koekalastus kalojen määrän selvittämiseksi. Särkiä ja lahnoja oli yhteensä 440 kpl. Särkien keskimääräinen paino oli 20 g ja lahnojen 130 g. Jos jokaisen kalan painoksi lasketaan keskimääräinen arvo, on kalasaaliin yhteismassa 18,7 kg. Kuinka monta särkeä ja lahnaa kalastettiin?

167. Sinivalas on suurin ja painavin eläin. Aikuisen sinivalaan keskipituus on 25,5 m ja paino 145 t. Vastasyntyneiden poikasten keskipituus on 7,0 m ja paino 2,5 t. Jos erään sinivalasparven valaat asettuisivat peräkkäin, niistä muodostuisi 239 m pitkä jono. Valaiden yhteispaino olisi 1172,5 t. Kuinka monta aikuista ja poikasta parvessa on?

168. Koordinaatistoon sijoitetussa kartassa joki kulkee pitkin suoraa $y = 4x + 8$. Tähän jokeen laskee kaksi sivujokea, jotka kulkevat suorien $y = -2x + 4$ ja $y = \frac{1}{2}x - 3$ mukaisesti. Laske kilometrin tarkkuudella, kuinka kaukana toisistaan sivujokien yhtymäkohdat pääjokeen ovat, kun koordinaatiston yksikkönä on 10 km.

169. Suunnistuskilpailun toiseksi viimeinen rasti sijaitsee kartalla pisteessä $(-2, 8)$. Viimeinen rasti sijaitsee metsäpolulla paikassa, jonka etäisyys toiseksi viimeisestä rastista on pienin. Metsäpolkua esittää kartalla suora $y = 2x$. Kuinka pitkä matka on viimeiseltä rastilta origossa sijaitsevaan maaliin pitkin metsäpolkua, kun yksi koordinaatiston yksikkö vastaa yhtä kilometriä luonnossa? Anna vastaus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

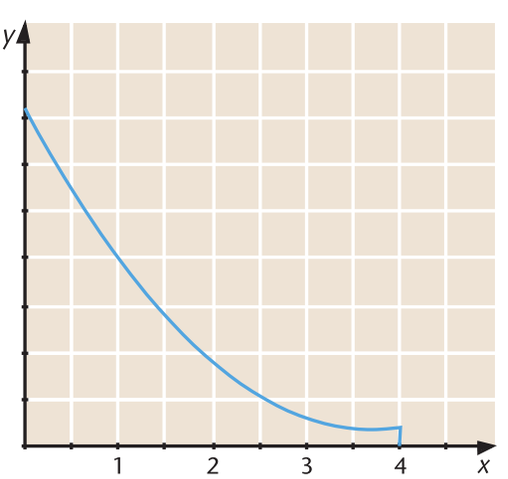
170. Tanssikoulu Tangon taika perii asiakkailtaan vuosimaksun 180 € lisäksi 7,50 € jokaisesta oppitunnista. Kilpaileva koulu Menuetti ottaa vuosimaksun 95 € lisäksi 12,50 € jokaisesta tanssitunnista. Kuinka monta kertaa vuodessa tunnilla on käytävä, jotta kannattaa valita Tangon taika?

171. Taksimatkan hinta muodostuu kiinteästä perusmaksusta ja matkan pituudesta riippuvasta maksusta. Nelli ajoi yöllä taksilla 5,0 km matkan, jolloin matkan hinta oli 11,10 €. Matin 18 km matka lentokentälle samaan vuorokaudenaikaan maksoi 22,80 €. Laske perusmaksun suuruus. Kuinka paljon taksi ottaa korvausta ajokilometriltä?

172. Antti ja Auli ajavat samaa tietä Tampereelle. Antti lähtee Helsingistä ja ajaa Tampereen moottoritiellä keskinopeudella 120 km/h. Auli lähtee samaan aikaan, mutta hänen lähtöpaikkansa on 30 km edempänä matkan varrella. Aulin keskinopeus on 100 km/h. Muodosta Antin ja Aulin ajamista matkoista y (km) ja matkoihin käytetyistä ajoista x (h) suoran yhtälöt ja laske niiden avulla, kuinka kauan he ovat ajaneet, kun Antti saavuttaa Aulin.

173. Kauppaketjun myynnin vuositavoite on 410 000 €. Toimitussyistä kuukausimyynti ei voi ylittää 55 000 €. Olkoon vuoden 7 ensimmäisen kuukauden aikana myynti keskimäärin s €/kk ja 5 viimeisen kuukauden aikana keskimäärin y €/kk. Mikä on y:n oltava s:n avulla lausuttuna, että tavoite tarkalleen saavutettaisiin? Piirrä funktion $y = y(s)$ kuvaaja. Millä välillä tämä on määritelty? [mukailtu S1999, 9a]

174. Huvipuistossa on uimaaltaaseen johtava liukumäki. Sen sivuprofiili on likimain paraabelin $y = 0{,}25x^2 - 1{,}85x + 3{,}6$ muotoinen, jossa x on vaakasuora etäisyys metreinä ja y liukumäen korkeus metreinä vedenpinnan tasosta. Kuinka korkealta
a) liukuminen aloitetaan
b) pudotaan veteen?



175. Muurahaiskeon poikkileikkausta keskikohdalta esittää paraabelin $y = -1{,}6x^2 + 2{,}4x$ se osa, joka jää x-akselin yläpuolelle. Maanpintaa kuvaa x-akseli. Laske keon maanpäällisen osan korkeus huippukohdassa, kun koordinaatiston yksikkönä on senttimetri.

176. Kahden suuren kaupungin A ja B välissä kulkee valtatie. Tutkimuksessa havaittiin, että asuntojen hinnat valtatien varteen syntyneissä pikkukaupungeissa olivat riippuvaisia etäisyydestä suuriin kaupunkeihin. Jos etäisyys kaupunkiin A on x kilometriä, asunnon neliöhintaa y (€) kuvaa paraabeli $y = 0{,}0256x^2 - 6{,}4x + 1000$. Määritä mallin avulla kaupunkien A ja B välinen etäisyys, kun tiedetään, että keskimääräiset neliöhinnat näissä kaupungeissa ovat samat. Mikä on neliöhinta puolessa välissä mainittuja kaupunkeja?

177. Arkkitehti Matti Suuronen suunnitteli vuonna 1965 prototyypin talosta, jonka poikkileikkauksen voidaan ajatella muodostuvan kahdesta paraabelista. Poikkileikkauksen yläosa oli funktion $f(x) = -\frac{1}{8}(x^2 - 18x + 65)$ x-akselin yläpuolisen osan muotoinen. Toisen osan muodosti funktion $g(x) = \frac{1}{8}(x^2 - 18x + 65)$ x-akselin alapuolinen osuus. Futuro-nimisen talon perusta oli teräsputkijaloilla lepäävä rengasjalusta. Tällä hetkellä Futuron prototyyppi on Hollannissa Utrechtin Centraal Museumin kokoelmissa. Laske Futuron leveys (leveimmältä kohdalta) ja suurin korkeus, kun koordinaatiston yksikkönä on 1 m.

178. Suuressa yrityksessä havaittiin, että influenssaepidemian aikana sairaana olevien lukumäärä y ja epidemian kesto x riippuivat toisistaan. Kun epidemia oli kestänyt 10 vuorokautta, sairaana oli 36 henkilöä. Epidemian huippu saavutettiin 20 vuorokauden kuluttua sen alkamisesta, jolloin sairaana oli 48 henkilöä. Epidemia oli ohi 40 vuorokauden kuluttua sen alkamisesta, jolloin kukaan ei ollut poissa työstä influenssan takia. Määritä tietojen avulla riippuvuutta esittävän paraabelin yhtälö. Laske mallin avulla, kuinka monta henkilöä oli sairaana, kun epidemia oli kestänyt 15 vuorokautta.

6.2 Useamman muuttujan yhtälöitä ja epäyhtälöitä

INFO

Rakentamisen ja rakennusten hoidon tavoitteena on tasapainoinen elinympäristö. Hyvä rakennus on elinkaariominaisuuksiltaan kestävä.

Perinteistä punamultamaalia on käytetty puurakennuksien maalaamiseen jo yli 300 vuotta. Maaliaineksia keitetään esimerkiksi vanhassa tynnyrissä. Tynnyriin laitetaan vesi, johon sekoitetaan rautasulfaattia. Tämän jälkeen lisätään ruisjauhot. Seos kuumennetaan kiehuvaksi ja sekoitetaan koko ajan. Kuumaan seokseen lisätään pellavaöljy. Keitosta sekoitetaan parin tunnin ajan, kunnes astian pohja tuntuu liisterimäiseltä. Punamulta-väriaine lisätään pieninä annoksina. Maalin annetaan jäähtyä, jolloin se on parhaimmillaan. Maali säilyy astiassaan muutamia päiviä, mutta seinälle maalattuna se kestää vuosikymmeniä.

ESIMERKKI 1

Vanhoja puurakennuksia entisöitiin ja maalattiin punamullalla. Yhdellä keittokerralla valmistettiin noin 100 litraa maalia. Rautasulfaattia, ruisjauhoja ja punamultaa tarvitaan yhteensä 29 kg/100 l. Jos ruisjauhoja käytettäisiin 5 % vähemmän, jauhemaisia aineita olisi yhteensä vain 28,55 kg/100 l. Jos punamultaa käytettäisiin 10 % enemmän, jauhemaisten aineiden kulutus olisi 30,6 kg/100 l. Määritä, kuinka paljon kutakin jauhemaista ainetta tarvittiin 100 litran maalierän valmistukseen.

RATKAISU

Merkitään 100 litran erään tarvittavia ainesosia kirjaimilla:

- rautasulfaatti (kg) x
- ruisjauhot (kg) y
- punamulta (kg) z

Koska jauhemaisia aineita kului yhteensä 29 kg, saadaan yhtälö

$$x + y + z = 29.$$

Jos ruisjauhoja on 5 % vähemmän, niitä on $0{,}95y$. Saadaan yhtälö

$$x + 0{,}95y + z = 28{,}55.$$

Jos punamultaa laitetaan 10 % enemmän, niin sitä on $1{,}1z$. Saadaan yhtälö

$$x + y + 1{,}1z = 30{,}6.$$

Yhtälöiden pitää toteutua samanaikaisesti, joten saadaan yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} x + y + z = 29 \\ x + 0{,}95y + z = 28{,}55 \\ x + y + 1{,}1z = 30{,}6 \end{cases}$$

Muodostetaan kaksi yhtälöparia ja eliminoidaan molemmista sama tuntematon, esimerkiksi z.

I yhtälöpari

$$\begin{cases} x + y + z = 29 \;\big|\cdot(-1) \\ x + 0{,}95y + z = 28{,}55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x - y - z = -29 \\ x + 0{,}95y + z = 28{,}55 \end{cases}$$

$$-0{,}05y = -0{,}45 \;\big|:(-0{,}05)$$

$$y = 9$$

II yhtälöpari

$$\begin{cases} x + y + z = 29 \;\big|\cdot(-1{,}1) \\ x + y + 1{,}1z = 30{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1{,}1x - 1{,}1y - 1{,}1z = -31{,}9 \\ x + y + 1{,}1z = 30{,}6 \end{cases}$$

$$-1{,}0x - 0{,}1y = -1{,}3$$

Muodostetaan saaduista yhtälöistä yhtälöpari ja ratkaistaan se.

$$\begin{cases} y = 9 \\ -0{,}1x - 0{,}1y = -1{,}3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -0{,}1x - 0{,}1 \cdot 9 &= -1{,}3 \\ -0{,}1x - 0{,}9 &= -1{,}3 \\ -0{,}1x &= -0{,}4 \quad \big| : (-0{,}1) \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Kun $x = 4$ ja $y = 9$, niin z saadaan sijoittamalla arvot esimerkiksi yhtälöön $x + y + z = 29$.

$$\begin{aligned} 4 + 9 + z &= 29 \\ z &= 29 - 13 = 16 \end{aligned}$$

VASTAUS rautasulfaattia 4 kg, ruisjauhoja 9 kg ja punamultaa 16 kg

ESIMERKKI 2 Santeri rakentaa kesämökilleen suorakulmion muotoisen laiturin. Laiturin pituus saa olla enintään 10 m, mutta sen on oltava vähintään 2 m. Leveys on enintään 3,5 m ja vähintään 1,5 m. Toisaalta laiturin pituus voi olla enintään 8 m suurempi kuin leveys. Laadi epäyhtälöt, jotka esittävät laiturin mahdollisia mittoja, ja piirrä epäyhtälöitä vastaava tasoalue koordinaatistoon.

RATKAISU Merkitään rakennettavan laiturin pituutta kirjaimella x (m) ja leveyttä kirjaimella y (m).

Tehtävänannosta saadaan rajoittavat ehdot:

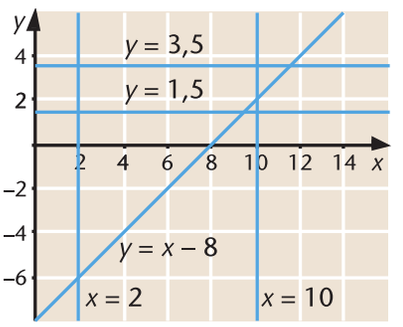
- Laiturin pituus voi olla enintään 10 m eli $x \leq 10$.
- Laiturin pituus on vähintään 2 m eli $x \geq 2$.
- Laiturin leveys voi olla enintään 3,5 m eli $y \leq 3{,}5$.
- Laiturin leveys on vähintään 1,5 m eli $y \geq 1{,}5$.
- Pituus on enintään 8 m suurempi kuin leveys eli $x \leq y + 8$.

Ratkaistaan viimeinen epäyhtälö y:n suhteen:

$$\begin{aligned} x &\leq y + 8 \\ -y &\leq -x + 8 \quad \big| : (-1) \\ y &\geq x - 8 \end{aligned}$$

Kaikkien näiden ehtojen on oltava yhtä aikaa voimassa, jolloin saadaan epäyhtälöryhmä:

$$\begin{cases} x \leq 10 \\ x \geq 2 \\ y \leq 3{,}5 \\ y \geq 1{,}5 \\ y \geq x - 8 \end{cases}$$

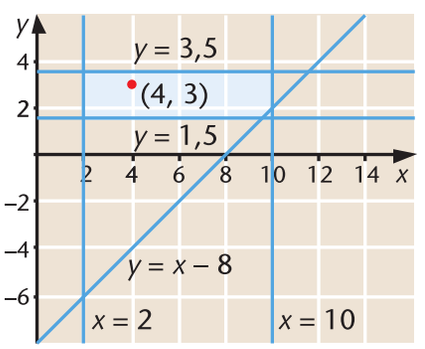


Tasoaluetta rajoittavat suorat $x = 10$, $x = 2$, $y = 3{,}5$, $y = 1{,}5$ ja $y = x - 8$.

Piirretään suorat koordinaatistoon.

Päätellään epäyhtälöiden avulla ratkaisuna oleva tasoalue.

- $x \leq 10$ eli suoran $x = 10$ vasen puoli
- $x \geq 2$ eli suoran $x = 2$ oikea puoli
- $y \leq 3{,}5$ eli suoran $y = 3{,}5$ alapuolinen osa
- $y \geq 1{,}5$ eli suoran $y = 1{,}5$ yläpuolinen osa
- $y \leq x - 8$ eli suoran $y = x - 8$ yläpuolinen osa



Ratkaisun voi vielä tarkistaa alueesta valitun pisteen avulla. Valitaan tarkistuspisteeksi (4, 3) ja sijoitetaan se kaikkiin epäyhtälöihin. Jos alue on piirretty oikein, piste toteuttaa kaikki epäyhtälöt.

• $x \leq 10$	$4 \leq 10$	tosi
• $x \geq 2$	$4 \geq 2$	tosi
• $y \leq 3{,}5$	$3 \leq 3{,}5$	tosi
• $y \geq 1{,}5$	$3 \geq 1{,}5$	tosi
• $y \leq x - 8$	$3 \geq 4 - 8 = -4$	tosi

Pituus voi olla esimerkiksi 4 m ja leveys 3 m.

VASTAUS Laiturin mitat voi valita kuvan tasoalueesta.

ESIMERKKI 3

Pihaa kunnostetaan liuskekivillä. Perinteisillä pihakivillä päällystetään polkuja, ja verhouskivillä pinnoitetaan pylväitä ja aitoja. Kivillä katetaan vähintään 14 m^2 pinta-ala. Käytettävien kivien yhteismäärä pitää olla vähintään 100, jolloin saadaan riittävän harmoninen kokonaisuus. Kivien menekki riippuu niiden koosta. Kunnostuksessa käytetään pihakiveä, jonka ala on keskimäärin 0,2 m^2, ja verhouskiveä, jonka ala on 0,1 m^2. Verhouskiviä, jotka ovat koristeellisempia, halutaan vähintään 40 kpl. Pihakivien hinta on 20 €/m^2 ja verhouskivien 24 €/m^2. Kuinka monta kappaletta kutakin kivilajia on otettava, jotta kustannukset olisivat mahdollisimman pienet? Laske minimikustannusten arvo.

RATKAISU

Tehtävässä halutaan minimoida kustannukset, joten kyseessä on optimointitehtävä. Kootaan tietoja taulukkoon.

Optimointitehtävän ratkaiseminen

1. Muodosta optimoitava lauseke.
2. Muodosta rajoitusehdot.
3. Esitä tilanne graafisesti.
4. Laske alueen kärkipisteet.
5. Laske optimiarvo.
6. Anna vastaus oikeassa muodossa.

Kivilaatu	Määrä (kpl)	Ala, jonka kivet kattavat (m^2)	Kustannukset (€)
pihakivi	x	$0{,}2x$	$20 \cdot 0{,}2x = 4x$
verhouskivi	y	$0{,}1y$	$24 \cdot 0{,}1y = 2{,}4y$

1. Optimoitava lauseke

Kokonaiskustannuksia kuvaa lauseke $4x + 2{,}4y$.

2. Rajoitusehdot

- Kivien lukumäärät eivät voi olla negatiivisia lukuja, joten $x \geq 0$, $y \geq 0$.
- Kivien yhteismäärän on oltava vähintään 100, joten
$$x + y \geq 100$$
$$y \geq -x + 100$$
- Katettava ala on vähintään 14 m^2, joten
$$0{,}2x + 0{,}1y \geq 14$$
$$0{,}1y \geq -0{,}2x + 14 \quad | : 0{,}1$$
$$y \geq -2x + 140$$
- Verhouskiviä halutaan vähintään 40, joten $y \geq 40$.

Koska kaikkien näiden epäyhtälöiden on oltava yhtä aikaa voimassa, saadaan epäyhtälöryhmä

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 40 \\ y \geq -x + 100 \\ y \geq -2x + 140 \end{cases}$$

Epäyhtälöryhmä määrittelee tasoalueen, jota rajoittavat suorat $x = 0$, $y = 40$, $y = -x + 100$ ja $y = -2x + 140$.

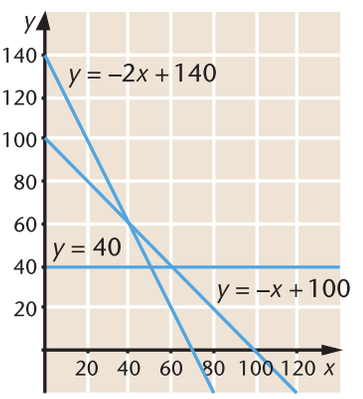
3. Epäyhtälöryhmän graafinen ratkaiseminen

Kuvan piirtäminen on helpompaa, kun määritetään ne kohdat, joissa rajoittavat suorat leikkaavat koordinaattiakselit.

Suora $y = -x + 100$ leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 100)$.

x-akselin leikkauskohta:

$$\begin{aligned} -x + 100 &= 0 \\ -x &= -100 \quad \big| : (-1) \\ x &= 100 \end{aligned}$$



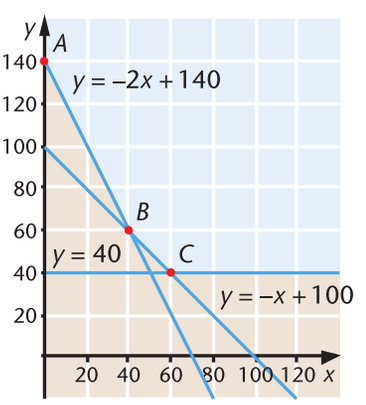
Suora $y = -2x + 140$ leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 140)$.

x-akselin leikkauskohta:

$$\begin{aligned} -2x + 140 &= 0 \\ -2x &= -140 \quad \big| : (-2) \\ x &= 70 \end{aligned}$$

Epäyhtälö määrää, kumpi puoli rajoittavaa suoraa väritetään:

- $x \geq 0$ eli y-akselin vasen puoli
- $y \geq 40$ eli suoran $y = 40$ yläpuolinen osa
- $y \geq -x + 100$ eli suoran $y = -x + 100$ yläpuolinen osa
- $y \geq -2x + 140$ eli suoran $y = -2x + 140$ yläpuolinen osa

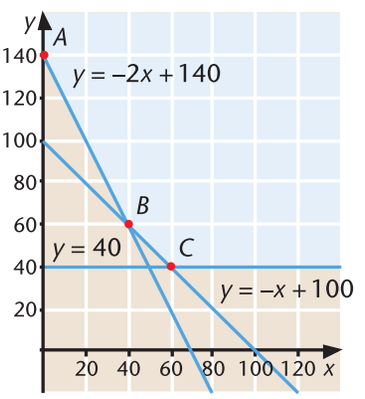


Alueesta voi vielä valita yhden tarkistuspisteen ja sijoittaa sen kaikkiin epäyhtälöihin, joiden on toteuduttava. Valitaan tarkistuspisteeksi (0, 160), joka sijaitsee väritetyllä alueella.

• $x \geq 0$	$0 \geq 0$	tosi
• $y \geq 40$	$160 \geq 40$	tosi
• $y \geq -x + 100$	$160 \geq -0 + 100 = 100$	tosi
• $y \geq -2x + 140$	$160 \geq -2 \cdot 0 + 140 = 140$	tosi

4. Kärkipisteiden ratkaiseminen

Alue on ylhäältä rajoittamaton. Näin kustannukset voivat kasvaa rajatta eikä lausekkeella $4x + 2{,}4y$ ole suurinta arvoa. Pienin arvo löytyy tasoalueen jostain kärkipisteestä A, B tai C.



Piste A nähdään suoran $y = -2x + 140$ yhtälöstä.

$$A = (0, 140)$$

Piste B on suorien $y = -x + 100$ ja $y = -2x + 140$ leikkauspiste.

$$\begin{cases} y = -x + 100 \\ y = -2x + 140 \end{cases}$$

$$-x + 100 = -2x + 140$$

$$x = 40$$

Kun $x = 40$, niin $y = -40 + 100 = 60$.

$$B = (40, 60)$$

Piste C on suorien $y = 40$ ja $y = -x + 100$ leikkauspiste.

$$\begin{cases} y = -x + 100 \\ y = 40 \end{cases}$$

$$-x + 100 = 40$$

$$-x = -60 \quad | : (-1)$$

$$x = 60$$

$$C = (60, 40)$$

5. Optimiarvon laskeminen

Sijoitetaan saadut kärkipisteet lausekkeeseen $4x + 2{,}4y$.

Piste	$4x + 2{,}4y$
A (0, 140)	$4 \cdot 0 + 2{,}4 \cdot 140 = 336$
B (40, 60)	$4 \cdot 40 + 2{,}4 \cdot 60 = 304$
C (60, 40)	$4 \cdot 60 + 2{,}4 \cdot 40 = 336$

Kustannukset ovat pienimmät pisteessä B. Laatoitukseen laitetaan siis 40 pihakiveä ja 60 verhouskiveä, jolloin kustannukset ovat 304 €.

VASTAUS 40 pihakiveä ja 60 verhouskiveä, kustannukset 304 €

Tehtäviä

E 1

179. Perheen kolme lasta, Venla, Arttu ja Leevi, painavat yhteensä 120 kg. Leevin paino saadaan laskemalla keskiarvo Venlan ja Artun painosta. Toisaalta Leevi painaa 18 kg enemmän kuin Arttu. Laske näiden tietojen avulla lasten painot.

E 2

180. Ihminen tarvitsee vuorokaudessa kaliumia noin 2500 mg ja mangaania noin 4,0 mg. Yhdessä kilogrammassa pihlajan marjoja on 3300 mg kaliumia ja 16 mg mangaania. Ruusunmarjakilossa on 8400 mg kaliumia ja 12 mg mangaania. Laadi epäyhtälöt, jotka ilmaisevat, kuinka paljon ihmisen tulisi vähintään syödä kumpaakin marjalaatua vuorokaudessa, jos ne olisivat ainoat kaliumin ja mangaanin lähteet. Piirrä epäyhtälöitä vastaava tasoalue koordinaatistoon. [preli S03, 9]

E 3

181. Opiskelija haluaa kahden kesälomaviikkonsa aikana kierrellä Euroopassa. Hän matkustaa junalla tai bussilla, kuitenkin niin, että saman päivän aikana matkustetaan vain toisella välineellä. Junalla matkustaessaan opiskelija kulkee päivässä 480 km ja bussilla matkustaessaan 320 km. Junamatkan hinta on keskimäärin 40 €/vrk ja bussilla 20 €/vrk. Rahaa hänellä on käytettävissään matkoihin 400 €. Kuinka monena päivänä opiskelijan on matkustettava junalla näiden enintään 14 vuorokauden aikana, jotta hän ennättäisi kiertää mahdollisimman pitkän reitin? Kuinka pitkän matkan hän tällöin tekee?

182. Fantasiapelissä hahmojen voimaa, ketteryyttä ja älykkyyttä kuvataan pisteillä seuraavasti:

	Voima	Ketteryys	Älykkyys
Ihminen	7	7	7
Haltia	5	9	9
Kääpiö	10	6	7
Peikko	14	5	4

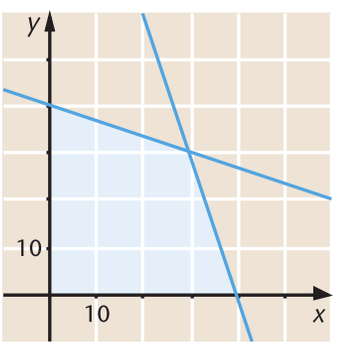
Eräässä vaiheessa peliä järjestettiin suuren neuvoston kokous, jossa oli läsnä haltioita, kääpiöitä ja peikkoja. Läsnäolijoiden älykkyyspisteet olivat yhteensä 102 pistettä. Ketteryyttä oli yhteensä 97 pistettä ja voimaa 123 pistettä. Kuinka monta kutakin hahmoa oli kokouksessa paikalla?

183. Lotta, Lassi ja Leevi saivat mainosten jakamisesta yhtensä 1600 euroa. Palkkio jaettiin kolmikon kesken niin, että Lotta sai 150 euroa enemmän kuin Lassi ja kaksi kertaa niin paljon kuin Leevi. Kuinka paljon kukin sai?

184. Matkailuautolla liikkuva lomaseurue käyttää päivittäin rahaa ruokaan, polttoaineeseen ja ravintolapalveluihin 90 €. Jos polttoaineen hinta nousisi 10 % ja muiden hinnat säilyisivät ennallaan, kuluisi päivittäin 92 €. Jos ruokaan päätettäisiin käyttää kaksinkertainen määrä rahaa juhannusjuhlien vuoksi, kuluisi päivässä 130 €. Laske, kuinka paljon karavaanarilta kuluu ruokaan, polttoaineeseen ja ravintolapalveluihin päivittäin.

185. Opiskelijoiden työssäkäynnissä on eroja koulutusaloittain. Vuonna 2003 lukiolaisista 22 %, ammattikoululaisista 37 % ja ammattikorkeakoululaisista 51 % kävi töissä. Yhteensä työssä käyviä näiden oppilaitosten opiskelijoista oli 157 520. Oppilaitoksissa oli opiskelijoita yhteensä 426 000 ja lukioissa 8000 vähemmän kuin ammattikorkeakouluissa. Laske oppilaitosten opiskelijamäärät.

186. Marttojen myyjäisissä myydään patalappuja ja patakintaita. Patalapusta saadaan voittoa 1 € ja patakintaasta 2 €. Patalappuja ja patakintaita ehditään valmistaa vain rajallinen määrä, koska työtuntien ja tarvittavan kankaan määrä on rajallinen. Suotuisat patalappujen x ja patakintaiden y määrät (x, y) on esitetty graafisesti koordinaatistossa. Kuinka monta patalappua ja kuinka monta patakinnasta on valmistettava, jotta niistä saatava voitto olisi mahdollisimman suuri?



187. Janinan kahvilassa myydään lounastuotteita. Janina on hankkinut 20 kg erän fetajuustoa ja 30 kg erän tomaatteja. Hän valmistaa niistä salaattiannoksia ja piirakoita. Yhteen salaattiannokseen tarvitaan 100 g juustoa ja 200 g tomaatteja. Pieneen piirakkaan tarvitaan 150 g fetajuustoa ja saman verran tomaatteja. Laadi epäyhtälöt, jotka ilmaisevat valmistettavien salaattiannosten ja piirakoiden määriä, ja esitä niiden ratkaisu graafisesti.

188. Kahden eri leikkeleen kilohinnat ja rasvapitoisuudet on koottu seuraavaan taulukkoon.

	Leikkele *A*	**Leikkele *B***
Kilohinta (€/kg)	20	25
Rasvapitoisuus (%)	16	4

Näistä kahdesta leikkeleestä kootaan leikkelelautanen. Lautasen hinnan on oltava vähintään 4 € mutta enintään 6 €. Rasvaa siinä voi olla enintään 30 g. Laadi lautasen koostumusta esittävät epäyhtälöt ja esitä graafisesti epäyhtälöryhmän ratkaisu.

189. Merjalla on punaista poppanan kudetta 7,2 kg ja vihreää kudetta 4,8 kg. Hän kutoo niistä poppanaliinoja kahdella eri mallilla. Malliin *A*, jossa on kirjontaa, kuluu 400 g punaista ja 400 g vihreää kudetta. Malliin *B* kuluu 600 g punaista ja 200 g vihreää kudetta. Torilla mallista *A* maksetaan 100 € ja mallista *B* 55 €. Kuinka monta Merjan pitäisi eri mallisia poppanoita kutoa, että myynnin arvo olisi suurin, jos kaikki menisivät kaupaksi?

190. Eräässä Sid Meierin strategiapelin versiossa pelaaja rakennuttaa erilaisia parannuksia, kuten sairaalan tai koulun, käyttämällä siihen insinöörejä tai uudisasukkaita. Insinööri työskentelee 8 h päivässä, kun taas uudisasukas vain 4 h. Palkkaa insinööri saa 6 kultarahaa päivässä ja uudisasukas 2. Molemmat syövät saman verran, 2 leipää päivässä. Pelaajan on rakennutettava viemärilaitos mahdollisimman nopeasti (siten, että työntekijät tekevät vuorokauden aikana mahdollisimman monta työtuntia, jolloin koko projektiin kuluu vähemmän päiviä). Pelaajalla on varattuna hankkeeseen 60 kultarahaa ja 52 leipää. Kuinka monta insinööriä ja kuinka monta uudisasukasta pelaajan pitää ottaa käyttöön?

191. Putkosen perhe on autolomalla Ranskassa. Päivän matkaosuus voidaan ajaa joko pikkuteitä tai moottoriteitä pitkin. Moottoritiellä on ajonopeuden ja tietullien vuoksi korkeammat kustannukset, keskimäärin 0,3 €/km. Vastaavat kustannukset pikkuteillä ovat vain 0,1 €/km. Toisaalta moottoriteillä matka edistyy nopeammin, keskimäärin 100 km/h. Matkanopeus pikkuteillä on vain 50 km/h. Matkaan Putkoset haluavat käyttää enintään 8 h, ja kustannukset saavat olla enintään 100 €. Kuinka monta kilometriä Putkosten pitää ajaa moottoriteillä ja kuinka monta pikkuteillä, jotta päivän aikana ajettaisiin mahdollisimman pitkä matka?

7 Työvälineitä IV – Funktion analysoiminen

Funktio on yksi matematiikan keskeisimmistä käsitteistä. Sen avulla voidaan mallintaa esimerkiksi monia luonnonilmiöitä ja laatia ennusteita. Lyhyessä matematiikassa tarkastellaan lähinnä erilaisia polynomifunktioita, esimerkiksi

$$f(x) = 5x - 2$$
$$g(x) = x^2 - 2x + 1$$
$$h(x) = x^3 - 1$$

Polynomifunktiota analysoidaan tutkimalla seuraavia asioita:

- Millaisia arvoja funktio saa?
- Mitkä ovat funktion nollakohdat?
- Milloin funktion arvot ovat positiivisia ja milloin negatiivisia?
- Milloin funktio on kasvava ja milloin vähenevä?
- Mitkä ovat funktion ääriarvot ja ääriarvokohdat?
- Mikä on funktion suurin ja pienin arvo?
- Millainen on funktion kuvaaja?

Tarkastellaan esimerkkinä toisen asteen polynomifunktiota $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$.

1. Funktion arvot

Funktiolle voidaan laskea arvo sijoittamalla funktion lausekkeeseen haluttu luku muuttujan x paikalle. Koska funktion arvot vastaavat koordinaatistossa y:n arvoja, saadaan näin pisteitä (x, y).

Lasketaan funktion $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$ arvot kohdissa $x = 4$ ja $x = -1$.

$$f(x) = 2 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 - 3 = 9$$

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 3 = 4$$

Kun lausekkeeseen sijoitetaan negatiivinen luku, on muistettava sulut.

2. Funktion nollakohdat

Funktion nollakohdilla tarkoitetaan niitä muuttujan x arvoja, joissa funktio saa arvon nolla. Näissä kohdissa funktion kuvaaja leikkaa x-akselin.

Nollakohdat lasketaan merkitsemällä funktion lauseke nollaksi. Näin saadusta yhtälöstä ratkaistaan x.

Funktion $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$ nollakohdissa $f(x) = 0$.

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

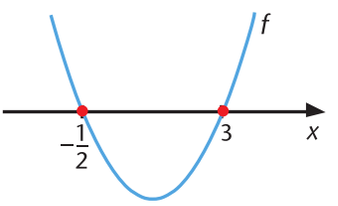
$$x = \frac{5 + \sqrt{49}}{4} \quad \text{tai} \quad x = \frac{5 - \sqrt{49}}{4}$$

$$x = \frac{5 + 7}{5} \qquad x = \frac{5 - 7}{4}$$

$$x = 3 \qquad x = -\frac{1}{2}$$

Toisen asteen yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaistaan ratkaisukaavalla

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$



Funktiolla on siis kaksi nollakohtaa.

Toisen asteen epäyhtälön ratkaiseminen

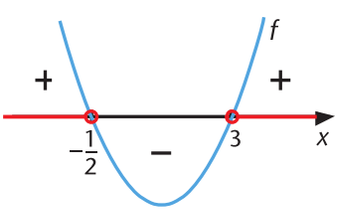
1. Ratkaise ensin vastaava yhtälö (eli funktion nollakohdat).
2. Hahmottele funktion kuvaaja (eli aukeamissuunta ja nollakohdat).
3. Päättele kuvaajan perusteella vastaus (eli milloin kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella tai alapuolella).

3. Funktion merkki

Tutkitaan funktion $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$ positiivisuutta ja negatiivisuutta.

Funktion $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$ toisen asteen termin kerroin on positiivinen, joten funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Funktion merkki muuttuu vain nollakohdissa.

- Funktio saa positiivisia arvoja ($f(x) > 0$), kun muuttujan x arvot ovat pienempiä kuin $-\frac{1}{2}$ tai suurempia kuin 3 eli

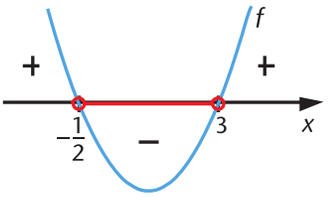


$2x^2 - 5x - 3 > 0$, kun $x < -\frac{1}{2}$ tai $x > 3$.

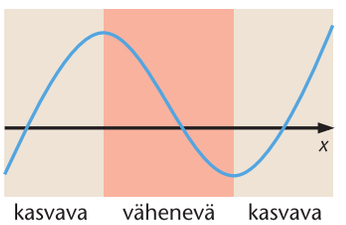
- Funktio f saa negatiivisia arvoja nollakohtien välissä.

$$2x^2 - 5x - 3 > 0, \text{ kun } -\frac{1}{2} < x < 3$$

Toisen asteen epäyhtälö ratkaistaan siis kuvaajan avulla.



4. Funktion kasvaminen ja väheneminen



Funktiota sanotaan kasvavaksi, jos muuttujan arvojen kasvaessa funktion arvotkin kasvavat. Vastaavasti vähenevän funktion arvot pienenevät, kun muuttujan arvot kasvavat. Funktio voi olla jollain välillä kasvava mutta toisella välillä vähenevä.

Kasvamista ja vähenemistä eli funktion monotonisuutta tutkitaan derivaatan avulla. Polynomifunktion kulkusuunta voi muuttua vain derivaatan nollakohdissa. Funktion derivoimiseen käytetään seuraavia derivoimissääntöjä ja -kaavoja:

Sääntö tai kaava	Esimerkkejä
$Dx^n = nx^{n-1}$	$Dx^2 = 2x^{2-1} = 2x$ $Dx^3 = 3x^{3-1} = 3x^2$
$Dx = 1$	
$Dc = 0$, c on vakio	$D(-15) = 0$
$D(cf) = cDf$	$D(3x^2) = 3 \cdot Dx^2 = 3 \cdot 2x = 6x$
$D(f + g) = Df + Dg$	$D(x^2 + 4x) = Dx^2 + D4x = 2x + 4$

Määritetään funktion $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$ derivaattafunktio.

$$f'(x) = 2 \cdot 2x^{2-1} - 5 = 4x - 5$$

Derivaatta on nolla, kun

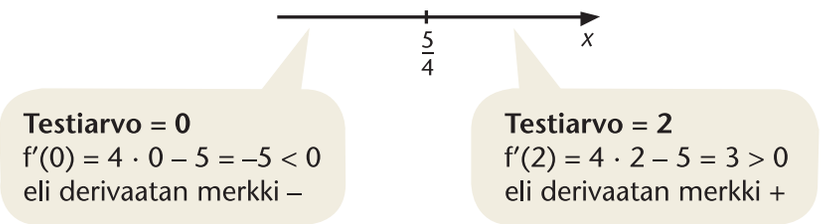
$$\begin{aligned} 4x - 5 &= 0 \\ 4x &= 5 \quad \big| : 4 \\ x &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

- Funktio on kasvava, kun derivaatta on nolla tai positiivinen eli kun $f'(x) \geq 0$.
- Funktio on vähenevä, kun derivaatta on nolla tai negatiivinen eli kun $f'(x) \leq 0$.

Funktion kulku perustellaan derivaatan merkkikaaviolla. Derivaatan merkki voidaan selvittää kahdella eri tavalla.

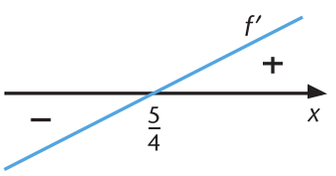
Tapa 1

Valitaan derivaatan nollakohdan molemmilta puolilta testiarvo:

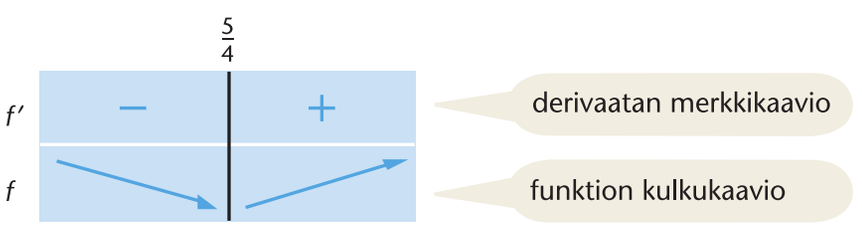


Tapa 2

Hahmotellaan derivaatan kuvaaja. Derivaattafunktio $f'(x) = 4x - 5$ on nouseva suora, joka leikkaa x-akselin nollakohdassaan $x = \frac{5}{4}$.



Näiden perusteella voidaan laatia derivaatalle merkkikaavio ja funktiolle kulkukaavio.

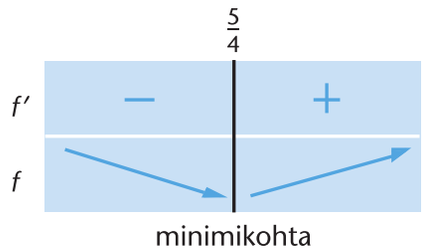


Funktio f on vähenevä, kun $x \leq \frac{5}{4}$, ja f on kasvava, kun $x \geq \frac{5}{4}$.

5. Funktion ääriarvot sekä suurin ja pienin arvo

Kulkukaavion avulla voidaan lisäksi määrittää funktion ääriarvot. Jos funktio on määritelty rajoittamattomalla välillä, ainoat mahdolliset ääriarvot sijaitsevat derivaatan nollakohdissa.

Niinpä funktion $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$ ainoa ääriarvokohta on $x = \frac{5}{4}$.
Kulkukaavion perusteella se on minimikohta.



Vastaava ääriarvo eli minimi saadaan laskettua sijoittamalla ääriarvokohta funktion lausekkeeseen.

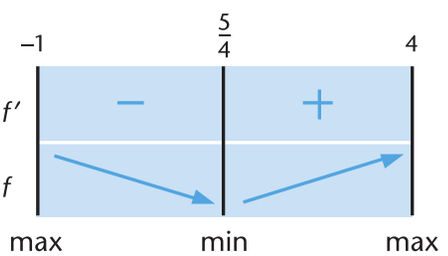
$$f\left(\frac{5}{4}\right) = 2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{5}{4}\right) - 3 = -6\frac{1}{8}$$

Kulkukaavion perusteella tämä arvo on myös pienin funktion saamista arvoista.

Tarkastellaan vielä funktion kulkua kahdella suljetulla välillä.

väli [–1, 4]

Derivaatan nollakohta sijaitsee tällä välillä.



Funktion pienin arvo on edelleen $f\left(\frac{5}{4}\right) = -6\frac{1}{8}$.

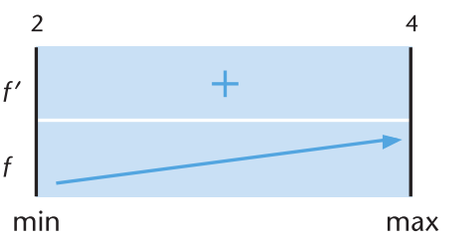
Suurin arvo saadaan jommassakummassa välin [–1, 4] päätepisteistä.

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 3 = 4$$
$$f(4) = 2 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 - 3 = 9$$

Suurin arvo välillä [–1, 4] on siis 9.

väli [2, 4]

Derivaatan nollakohta ei sijaitse tällä välillä.



Kulkukaavion perusteella pienin arvo saadaan kohdassa $x = 2$ ja suurin arvo kohdassa $x = 4$.

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 3 = -5$$
$$f(4) = 2 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 - 3 = 9$$

Välillä [2, 4] funktion f suurin arvo on siis 9 ja pienin arvo –5.

6. Funktion kuvaajan piirtäminen

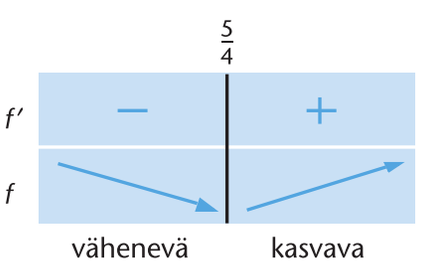
Mitä monimutkaisemmasta funktiosta on kysymys, sitä enemmän tietoja tarvitaan kuvaajan piirtämiseen. Ensimmäisen asteen polynomifunktion kuvaaja on suora, joten riittää, että lasketaan vähintään kaksi pistettä.

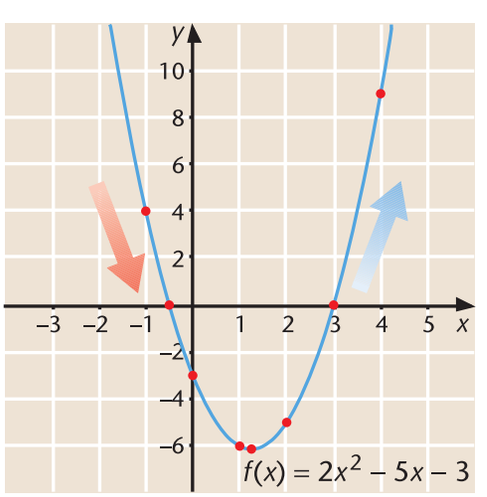
Toisen asteen polynomifunktion kuvaaja on paraabeli, joten tarvitaan useampia pisteitä. Myös kulkukaaviosta on hyötyä, sillä siitä nähdään paraabelin huippukohta ja funktion kulku. Funktion nollakohdat on myös syytä selvittää. Nämä toimenpiteet tarvitaan myös kolmannen asteen polynomifunktion piirtämiseen.

Lasketaan muutamia arvoja funktiolle $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$. Nollakohdat ja huippu on laskettu jo edellä.

	x	$f(x) = 2x^2 - 5x - 3$	(x, y)
	-1	$f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 3 = 4$	$(-1, 4)$
nollakohta	$-\frac{1}{2}$	$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
	0	$f(0) = 2 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 - 3 = -3$	$(0, -3)$
	1	$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 3 = -6$	$(1, -6)$
huippu	$\frac{5}{4}$	$f\left(\frac{5}{4}\right) = -6\frac{1}{8}$	$\left(\frac{5}{4}, -6\frac{1}{8}\right)$
	2	$f(2) = -5$	$(2, -5)$
nollakohta	3	$f(3) = 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - 3 = 0$	$(3, 0)$
	4	$f(4) = 9$	$(4, 9)$

Sijoitetaan lasketut pisteet koordinaatistoon ja piirretään funktion kuvaaja.





Tehtäviä

192. Laske $f(6)$ ja $f'(6)$, kun
a) $f(x) = -6x^3 + 4x^2 - 5x + 1$
b) $f(x) = (x + 3)(x - 8)$
c) $f(x) = \dfrac{4x^3 - 8x^2 + 16x}{2x}$, $x \neq 0$

193. Olkoon funktio $g(x) = \frac{2}{3}x - 5$. Laske, milloin
a) $g(x) = 0$ b) $g(x) \geq 3$.

194. Laske funktion f ja derivaattafunktion f' nollakohdat, kun
a) $f(x) = -3x^2 - 6x + 72$ b) $f(x) = 4(x + 5)(x - 4)$.

195. a) Millä vakion t arvolla $f(-2) = f'(-2)$, kun $f(x) = x^2 + 4x + t$?
b) Mitä funktion arvo ja derivaatan arvo kohdassa $x = -2$ kertovat funktion kuvaajasta?

196. Olkoon $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Laske, milloin
a) $f(x) = 0$ b) $f(x) \geq 0$. c) Piirrä funktion kuvaaja.

197. Ratkaise epäyhtälö.
a) $-2x^2 - 2x + 12 > 0$ b) $x^2 + 12x \geq -35$

198. Olkoon $h(x) = -3x^2 + 6x - 5$.
a) Laske, millä muuttujan x arvoilla $h'(x) = 0$.
b) Määritä, milloin funktio on kasvava ja vähenevä.
c) Laske funktion suurin arvo.

199. Millä muuttujan x arvoilla funktio $g(x) = x^3 + 6x^2 - 36x$ on
a) kasvava, kun $x \in [-10, 10]$ b) vähenevä, kun $x \in [0, 5]$?

200. Millä muuttujan x arvoilla funktiot $f(x) = -2x^3 + 15x^2 + 144x$ ja $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ ovat molemmat kasvavia?

201. Määritä funktion $f(x) = 2x^2 - x + 4$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 5]$.

202. Määritä kolmannen asteen funktion $g(x) = \frac{2}{3}x^3 - 7\frac{1}{2}x^2 + 7x + 1$ suurin ja pienin arvo välillä $0 \leq x \leq 8$.

203. Määritä vakio a siten, että funktion $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + a$ pienin arvo välillä $[0, 2]$ on $-4\frac{1}{2}$. Mikä on tällöin funktion suurin arvo kyseisellä välillä?

204. Olkoon $f(x) = x^2 - 3{,}1x - 1{,}4$. Laske funktion f nollakohdat ja tutki, millä välillä se saa negatiivisia arvoja. [S2004, 1]

205. Osoita, että funktioilla $f(x) = -4x^3$ ja $g(x) = x^3 + x$ ei ole ääriarvoja mutta summafunktiolla $b(x) = f(x) + g(x)$ on. Mitkä ovat nämä ääriarvot? [S2004, 10]

206. Mitä arvoja funktion $-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 1$ derivaatta voi saada? [K2003, 8]

207. Tee selkoa, mitä polynomifunktion derivaatta kertoo funktion kulusta. Osoita, että funktio $f(x) = 5x^3 + \frac{13}{2}x^2 + 3x - 12$ on kaikkialla kasvava. [S2002, 11]

208. Tutki, millainen luvun q tulee olla, jotta polynomifunktio $f(x) = x^3 + x^2 + qx + 1$ olisi ainakin jollakin välillä vähenevä. Mikä on tällöin tämä väli? [K2002, 11]

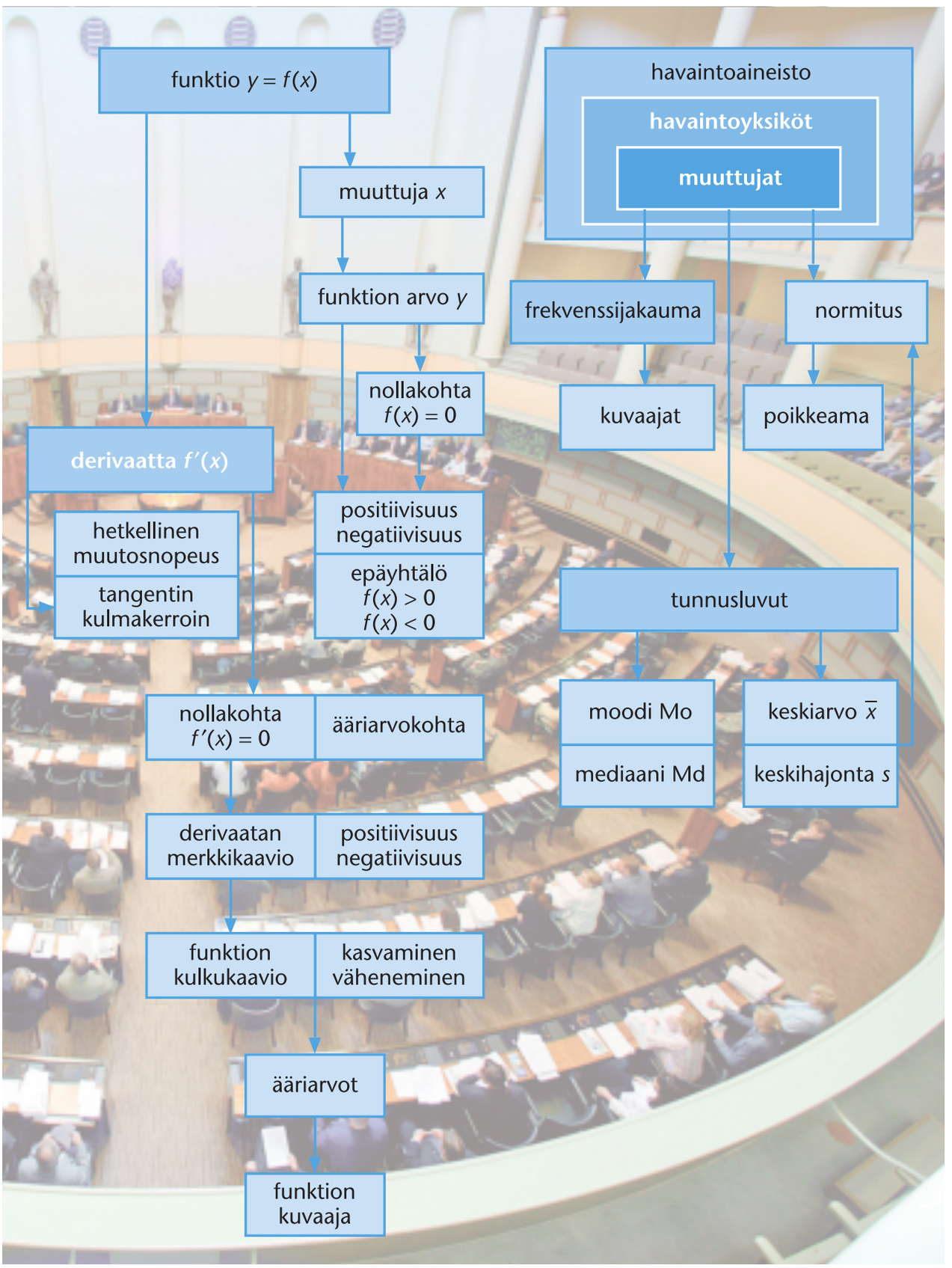
209. Ranskalaisen matemaatikon Adrien Legendren mukaan nimetyt polynomit $P_n(x)$ määritellään rekursiivisesti seuraavalla tavalla:

$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$,

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x \cdot P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x), \text{ kun } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Määritä arvoja $n = 2$ ja $n = 3$ vastaavat polynomit $P_2(x)$ ja $P_3(x)$ sekä näiden derivaatat $P_2'(x)$ ja $P_3'(x)$. Osoita, että on voimassa yhtälö $P_3'(x) - xP_2'(x) = 3P_2(x)$. [K2001, 13]

8 Yhteiskunta



8.1 Funktion tulkintaa

INFO

Suomi on osa Euroopan Unionia. Se on itsenäisten valtioiden muodostama yhteisö, joka muista kansainvälisistä järjestöistä poiketen voi säätää lakeja, jotka koskevat kaikkia jäsenmaita. Näin unionin jäsenyys vaikuttaa monella tavalla yksittäisiin kansalaisiinkin. EU säätää kahdentyyppisiä lakeja: asetuksia ja direktiivejä. EU:n säätämä laki ohittaa aina kansalliset lait. Direktiivi on lainsäädäntöohje, jonka muotoon voi kansallinen parlamentti vaikuttaa, mutta sen sisältöä tai tarkoitusta ei saa muuttaa.

Vaikka EU säätelee monella tavalla jäsenmaiden lainsäädäntöä, tarvitaan edelleen kansallista parlamenttia. Koska eduskunnan jäsenet, kansanedustajat, valitaan vaaleilla joka neljäs vuosi, valtiovalta kuuluu Suomessa kansalle. Äänestäminen on siis suora tapa vaikuttaa Suomen asioihin. Kansalaiset valitsevat vaaleilla edustajat myös Euroopan Unionin parlamenttiin.

Euroopan Unionin tärkein päättävä elin on (ministeri)neuvosto, jossa jokaisella maalla on yksi edustaja. Kukin jäsenmaa toimii vuorollaan neuvoston puheenjohtajana. Neuvoston rinnalla työskentelee parlamentti, joka osallistuu lainsäädäntötyöhön ja hyväksyy uudet lait yhdessä neuvoston kanssa. Lisäksi parlamentti päättää unionin budjetin hyväksymisestä sekä uusien jäsenmaiden ottamisesta unioniin.

ESIMERKKI 1

Jokaisella EU:n jäsenellä on edustus parlamentissa, jossa on yhteensä 732 edustajaa. Kunkin maan edustajien määrä riippuu likimain lineaarisesti asukasluvusta. Jos valtion asukasluku on x (miljoonaa), valtion paikkojen määrää parlamentissa voidaan approksimoida funktiolla p:

$$p(x) = 1{,}154x + 8{,}367$$

a) Kuinka monta edustajaa parlamentissa on Suomella, jonka asukasluku on noin 5 miljoonaa? Entä Ruotsilla, kun sen asukasluku on 9 miljoonaa?
b) Laske funktion avulla Espanjan asukasluku, kun sillä on 54 jäsentä parlamentissa.

RATKAISU

a) Suomen edustajien määrä saadaan laskemalla funktion arvo kohdassa $x = 5$.

$$p(5) = 1{,}154 \cdot 5 + 8{,}367 = 14{,}137 \approx 14$$

Ruotsin edustajien määrä saadaan laskemalla funktion arvo kohdassa $x = 9$.

$$p(9) = 1{,}154 \cdot 9 + 8{,}367 = 18{,}753 \approx 19$$

b) Ratkaistaan asukasluku yhtälön $p(x) = 54$ avulla:

$$\begin{aligned} 1{,}154x + 8{,}367 &= 54 \\ 1{,}154x &= 45{,}633 \quad \big| : 1{,}154 \\ x &= 39{,}543\ldots \\ x &\approx 40 \end{aligned}$$

VASTAUS

a) Suomella on 14 ja Ruotsilla 19 edustajaa.
b) 40 miljoonaa

Todellisuudessa riippuvuus asukasmäärän ja edustajien määrän välillä ei ole täysin lineaarista. Malli ei pidä paikkaansa erityisen pienten tai suurten valtioiden kohdalla. Esimerkiksi Luxemburg saisi mallin mukaan 9 edustajaa, mutta todellisuudessa sillä on vain 6 edustajaa. Vastaavasti Saksa saisi asukasmääränsä perusteella 103 edustajaa, mutta sillä on 99 edustajaa.

ESIMERKKI 2

Eräällä alueella maataloustukien määrä e (milj. €) oli ajan t funktio

$$e(t) = -\frac{2}{7}t^2 + \frac{16}{7}t + \frac{66}{7}.$$

Ajalla t tarkoitetaan Suomen EU-jäsenyysvuosia. Kuinka kauan kyseinen alue saa maataloustukea?

RATKAISU

Alue saa maataloustukea, kun $e(t) > 0$ eli

$$-\frac{2}{7}t^2 + \frac{16}{7}t + \frac{66}{7} > 0.$$

Ratkaistaan ensin nollakohdat.

$$-\frac{2}{7}t^2 + \frac{16}{7}t + \frac{66}{7} = 0 \quad \big| \cdot 7$$

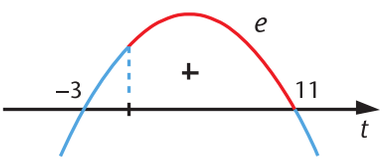
$$-2t^2 + 16t + 66 = 0 \quad \big| : 2$$

$$-t^2 + 8t + 33 = 0$$

$$t = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 33}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-8 \pm 14}{-2}$$

$$t = 11 \quad \text{tai} \quad t = -3$$

Hahmotellaan funktion e kuvaaja. Kuvaajan avulla voidaan päätellä epäyhtälön $e(t) > 0$ ratkaisu. Koska aika $t > 0$, niin $0 < t < 11$. Tukea maksetaan siis 11 vuoden ajan.



VASTAUS

Tukea maksetaan 11 vuotta.

INFO

Päätöksiä tehdään myös kuntatasolla. Kunnan asioita hoitamaan valitaan valtuusto, josta kootaan sitten hallitus. Myös kunnallisvaalit järjestetään joka neljäs vuosi. Koska monet julkisen vallan tehtävistä (esimerkiksi opetuksen järjestäminen) on siirretty kunnan vastuulle, on kuntatason päätöksillä suuri käytännön merkitys jokaisen kuntalaisen elämään.

ESIMERKKI 3

Funktio k (%) kuvaa erään kunnan valtuustossa enemmistönä istuneen puolueen kannatusta, kun valtuustokausi on kestänyt x vuorokautta.

$$k(x) = 0{,}00002x^2 - 0{,}022x + 44{,}9, \quad x \in [0, 1460]$$

a) Millä aikavälillä puolueen kannatus nousi?
b) Milloin kannatusprosentti oli pienin?

RATKAISU

Tarkastellaan kannatusfunktion k kulkua derivaatan avulla.

$$k'(x) = 0{,}00004x - 0{,}022$$

Lasketaan derivaatan nollakohta.

$$\begin{aligned} &k'(x) = 0, \text{ kun} \\ &0{,}00004x - 0{,}022 = 0 \\ &\qquad 0{,}00004x = 0{,}022 \quad \big| : 0{,}00004 \\ &\qquad\qquad x = 550 \end{aligned}$$

Laaditaan funktion kulkukaavio derivaatan merkkikaavion avulla.

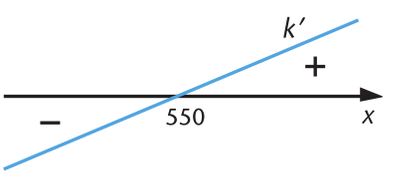
Tapa 1 **Testipisteiden avulla**

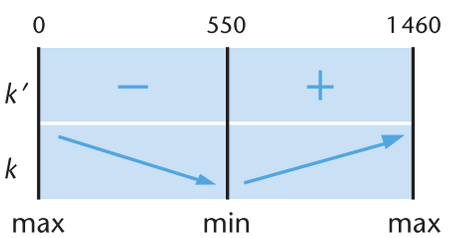
Valitaan testipisteiksi $x = 500$ ja $x = 600$.

$k'(500) = 0{,}00004 \cdot 500 - 0{,}022 = -0{,}0002 < 0$

$k'(600) = 0{,}00004 \cdot 600 - 0{,}022 = 0{,}002 > 0$

Tapa 2 **Derivaatan kuvaajan avulla**





Aikavälillä [550, 1460] funktio on kasvava, joten tällä välillä kannatus nousi. Pienin kannatusprosentti saadaan, kun $x = 550$ (vuorokautta).

VASTAUS

a) Kannatus nousi välillä [550, 1460].
b) Puolueella on pienin kannatus, kun valtuustovuorokausia on 550.

INFO

Suomessa on yleinen ja yhtäläinen äänioikeus, eli kaikilla vaalipäivänä 18 vuotta täyttäneillä on yksi ääni. Vaalitapa on suhteellinen. Näin puolue saa likimain sen osuuden edustajien paikoista, joka vastaa ääniosuutta annetuista äänistä.

Eduskunta- ja kunnallisvaaleissa käytetään d'Hondtin menetelmää. Siinä jokaiselle ehdokkaalle lasketaan vertausluku seuraavasti:

1. Lasketaan ehdokkaan saama äänimäärä.
2. Lasketaan puolueen saama kokonaisäänimäärä.
3. Suurimman henkilökohtaisen äänimäärän saanut ehdokas saa vertausluvukseen koko puolueen saaman äänimäärän. Toiseksi eniten ääniä saanut saa puolet kokonaisäänimäärästä ja niin edelleen.

ESIMERKKI 4

Puolueen toimistossa on laskettu, että puolueen asettaessa 30 vaaliehdokasta kunnallisvaaleissa ehdokkaan keskimääräinen äänisaalis on 120 ääntä. Jokainen uusi ehdokas alentaa henkilökohtaista keskimääräistä äänimäärää kymmenellä äänellä ja vastaavasti yhden ehdokkaan vähentäminen kasvattaa jäljelle jääneiden ehdokkaiden äänimäärää kymmenellä äänellä ehdokasta kohti. Kuinka monta ehdokasta puolueen kannattaa kyseisellä alueella asettaa? Kuinka monta ääntä puolue laskee tällöin vaaleissa kaikkiaan saavansa?

RATKAISU

Muodostetaan ensin kokonaisäänimäärää kuvaava funktio f. Merkitään ehdokasmäärän muutosta kirjaimella x. Käytetään funktion muodostamisen apuna taulukkoa.

Ehdokkaita	Äänet/ehdokas	Puolueen kokonaisäänimäärä
30	120	$30 \cdot 120$
$30 + 1$	$120 - 10$	$(30 + 1)(120 - 10)$
$30 + 2$	$120 - 10 \cdot 2$	$(30 + 2)(120 - 10 \cdot 2)$
$30 + x$	$120 - 10x$	$(30 + x)(120 - 10x)$

Kokonaisäänimäärää kuvaa siis funktio

$$f(x) = (30 + x)(120 - 10x) = 3600 - 300x + 120x - 10x^2$$
$$= -10x^2 - 180x + 3600$$

Ehdokkaiden määrä ja äänimäärä eivät voi olla negatiivisia lukuja, joten saadaan kaksi ehtoa:

Ehdokkaiden määrä

$$30 + x \geq 0$$
$$x \geq -30$$

Äänimäärä

$$120 - 10x \geq 0$$
$$-10x \geq -120 \quad | : (-10)$$
$$x \leq 12$$

Funktion f määrittelyväli on $[-30, 12]$.

Koska kyseessä on ääriarvon etsiminen, derivoidaan f ja lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$f'(x) = -20x - 180$$
$$f'(x) = 0, \text{ kun } -20x - 180 = 0$$
$$-20x = 180 \quad | : (-20)$$
$$x = -9$$

Laaditaan funktion kulkukaavio derivaatan merkkikaavion avulla.

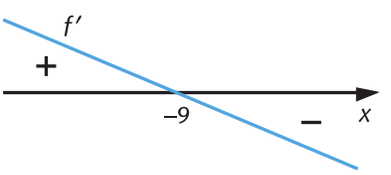
Tapa 1 **Testipisteiden avulla**

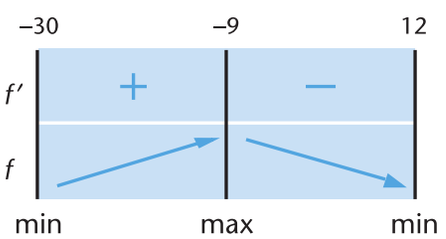
Valitaan testipisteiksi $x = -10$ ja $x = 0$.

$f'(-10) = -20 \cdot (-10) - 180 = 20 > 0$

$f'(0) = -20 \cdot 0 - 180 = -180 < 0$

Tapa 2 **Derivaatan kuvaajan avulla**





Funktio f saa suurimman arvonsa kohdassa $x = -9$.

Tällöin ehdokkaita on asetettava $30 - 9 = 21$ (kpl).
Puolueen saama kokonaisäänimäärä on

$$f(-9) = -10 \cdot (-9)^2 - 180 \cdot (-9) + 3600 = 4410.$$

VASTAUS Ehdokkaita on asetettava 21, jolloin puolueen äänisaaliiksi tulee 4410.

INFO

Suomen kansallista parlamenttia kutsutaan eduskunnaksi. Eduskunnan keskeisimpiä tehtäviä ovat

- lakien säätäminen
- päättäminen valtion budjetista
- hallituksen ja sen alaisten viranomaisten toiminnan valvominen.

Budjetin suurimmat tulot saadaan veroista. Lisäksi kansalaisilta kerätään erilaisia maksuja palveluista, kuten hallintopalvelujen käytöstä. Valtio ottaa tarvittaessa myös velkaa. 1990-luvun alkuun saakka valtionvelka oli pieni. 90-luvun lamavuodet muuttivat tilanteen, ja velan määrä kasvoi suureksi laman huippuvuosina.

ESIMERKKI 5

Funktio $v(k) = 0{,}000717k^3 - 0{,}271k^2 + 33{,}67k - 1307{,}5$ esittää likimääräisesti Suomen valtionvelkaa v (miljardia euroa) bruttokansantuotteen k (miljardia euroa) funktiona aikavälillä 1995–2004. Bruttokansantuote (BKT) vuonna 1995 oli noin 95 mrd euroa ja vuonna 2004 noin 150 mrd euroa.

a) Kuinka suuri velka oli BKT:n ollessa 130 mrd euroa?

b) Kuinka paljon velkaa oli enimmillään? Kuinka suuri oli BKT tuolloin?

RATKAISU

a) Kun bruttokansantuote $k = 130$ mrd euroa, valtion velka on

$$\begin{aligned} v(130) &= 0{,}000717 \cdot 130^3 - 0{,}271 \cdot 130^2 + 33{,}67 \cdot 130 - 1307{,}5 \\ &= 64{,}949 \approx 65 \text{ (mrd euroa)} \end{aligned}$$

b) Velan suurin arvo saadaan derivoimalla funktio v.

$$\begin{aligned} v'(k) &= 3 \cdot 0{,}000717k^2 - 2 \cdot 0{,}271k + 33{,}67 \\ &= 0{,}002151k^2 - 0{,}542k + 33{,}67 \end{aligned}$$

Kyseessä on ääriarvon etsiminen, joten lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$0{,}002151k^2 - 0{,}542k + 33{,}67 = 0$$

$$k = \frac{0{,}542 \pm \sqrt{(-0{,}542)^2 - 4 \cdot 0{,}002151 \cdot 33{,}67}}{2 \cdot 0{,}002151}$$

$$k = \frac{0{,}542 + 0{,}0637755...}{0{,}004302} = 140{,}81... \approx 141 \text{ (mrd euroa)} \quad \text{tai}$$

$$k = \frac{0{,}542 - 0{,}0637755...}{0{,}004302} = 111{,}16... \approx 111 \text{ (mrd euroa)}$$

Laaditaan funktion kulkukaavio derivaatan merkkikaavion avulla.

Tapa 1 **Testipisteiden avulla**

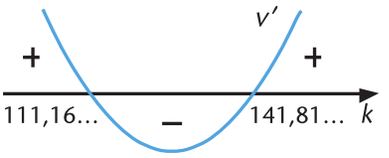
Valitaan testipisteiksi $k = 100$, $k = 120$ ja $k = 145$.

$v'(100) = 0{,}98 > 0$

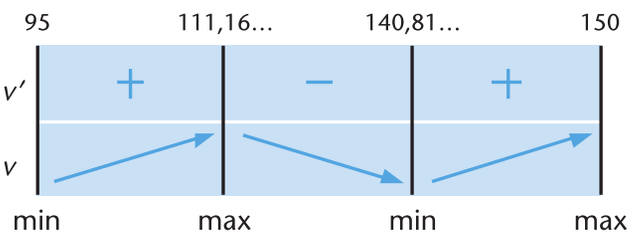
$v'(120) = -0{,}39... < 0$

$v'(145) = 0{,}3... > 0$

Tapa 2 **Derivaatan kuvaajan avulla**



Funktio v on määritelty, kun $95 \leq k \leq 150$ (mrd euroa).



Funktio v saa suurimman arvonsa joko kohdassa $k = 111$ tai $k = 150$.

Lasketaan valtion velan v suuruus näissä kohdissa.

$v(111{,}16...) = 71{,}47... \approx 71$ (mrd euroa)

$v(150) = 65{,}375 \approx 65$ (mrd euroa)

Velan suurin arvo oli siis noin 71 mrd euroa, kun BKT oli noin 111 mrd euroa.

VASTAUS

a) 65 mrd euroa
b) Velka oli suurimmillaan 71 mrd euroa, kun BKT oli 111 mrd euroa.

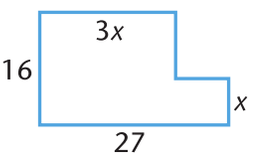
Tehtäviä

E 1

210. Kauppakeskuksen ulko-ovella jaettiin mainoslehteä tuotetarjouksista. Jaettavana olevien lehtien määrää ajan x (tuntia avaamishetkestä) funktiona kuvaa suora $f(x) = 5000 - 390x$. Kauppakeskus on avoinna klo 9.00–21.00.
a) Kuinka monta mainoslehteä oli alussa?
b) Jaettiinko kaikki mainoslehdet ensimmäisen päivän aikana?

E 2

211. Tontin rakennusoikeus on 300 m^2. Matti suunnittelee rakentavansa tontille talon, jonka pohjapiirustus on kuvassa. Millä muuttujan x arvoilla rakennusoikeus ei ylity?



E 3

212. Suomalaisten perheiden taloustilanne kehittyy melko samankaltaisesti useissa tapauksissa: velat ovat suurimmillaan asunnon hankinnan takia, mutta tilanne paranee koko ajan eläkeiän lähestyessä. Herra Mutikaisen taloustilannetta voitaisiin mallintaa funktiolla r, joka kertoo hänen nettovarallisuutensa tuhansina euroina Mutikaisen iän t funktiona:

$$r(t) = 0{,}8t^2 - 64t + 1200\,,\ t \in [28{,}60].$$

a) Mutikainen jäi eläkkeelle 60-vuotiaana. Kuinka paljon hänellä tuolloin oli varallisuutta?
b) Millä aikavälillä Mutikaisen nettovarallisuus väheni?
c) Millä aikavälillä Mutikaisella oli velkaa? Kuinka paljon sitä enimmillään oli?

E 4

213. Pitkään perheyrityksenä toimineen yhtiön hallituksessa on 10 jäsentä. Yhtiöjärjestyksessä on sovittu, että jokaisella hallituksen jäsenellä on 40 ääntä. Samassa yhteydessä on sovittu, että jos hallituksen jäsenten määrä muuttuu, muuttuu myös jäsenen äänimäärä: jokainen uusi jäsen vähentää kaikkien hallituksen jäsenten äänimäärää viidellä äänellä. Jos jäsenten määrää vähennetään, äänimäärä kasvaa vastaavalla tavalla. Kuinka monta jäsentä hallituksessa pitää olla, jotta yhteisäänimäärä olisi mahdollisimman suuri? Mikä on tällöin yhden jäsenen äänimäärä?

E 5

214. Automuseon näyttelyissä vieraili ensimmäisen 25 näyttelypäivän aikana paljon ihmisiä. Päiväkohtaisissa kävijämäärissä a_n oli kuitenkin paljon vaihtelua:

$$a_n = n^3 - 42n^2 + 480n - 100, \quad n = 1, 2, 3, ..., 25$$

Muuttuja n ilmoittaa siis, kuinka mones näyttelypäivä on kyseessä. Määritä derivaatan avulla, minä päivänä näyttelyä kävi katsomassa eniten ihmisiä. Mikä oli kävijämäärä tuona päivänä?

215. Erään mallin mukaan rakennuksen tyhjeneminen esimerkiksi tulipalon alkaessa riippuu rakennuksessa työskentelevien määrästä sekä uloskäyntien määrästä. Funktio h kuvaa rakennuksessa olevien ihmisten määrää, kun palohälytyksen antamisesta on kulunut x sekuntia:

$h(x) = 100a - 0{,}5bx$, jossa

vakio a on rakennuksessa olevien henkilöiden määrä satoina ja b on uloskäyntien määrä. Koulussa oli palon alkaessa 600 henkilöä. Rakennuksessa oli 5 uloskäyntiä. Kuinka kauan rakennuksen tyhjentäminen kesti?

216. Kaisa käy sauvakävelylenkillä iltaisin. Hänen kävelemänsä matkan pituutta kilometreinä kuvaa funktio $s(t) = -7t^2 + 13t$, jossa t on aika tunteina lähtöhetkestä. Lisäksi $0 \leq t \leq 0{,}9$.

a) Kuinka pitkän matkan Kaisa kävelee, kun sauvakävelylenkki kestää 50 minuuttia?

b) Kuinka kauan Kaisalla kuluu aikaa kahden ensimmäisen kilometrin kävelyyn?

217. Mäkisen perhe on saanut perheen isovanhemmilta tarjouksen ostaa rantatontti edulliseen hintaan. Suorakulmion muotoisen tontin rantaviivan ja sitä vastaan kohtisuorassa olevan sivun pituus on yhteensä 100 metriä. Millainen alue Mäkisten on valittava, kun he haluavat alaltaan mahdollisimman suuren tontin? Kuinka paljon tästä alueesta on maksettava, kun isovanhemmat asettavat hinnaksi 35 euroa neliömetriltä?

218. Joen poikkileikkaus on funktion $h(x) = 0{,}5x^2 + 1{,}3x - 0{,}6$ x-akselin alapuolisen osan muotoinen. Laske joen

a) leveys b) syvyys, kun koordinaatiston yksikkönä on metri.

219. Keskisuuren suomalaisen kunnan kunnallisveroaste k (%) riippui väkiluvusta x (tuhansia asukkaita) seuraavasti:

$$k(x) = 0{,}04x^2 - 2{,}6x + 60.$$

Tämä riippuvuus selittyy pitkälti sillä, että kunnalla on vain tiettyyn rajaan asti kapasiteettia ottaa vastaan uusia asukkaita ilman palvelujen parantamista, kuten uusien koulujen rakentamista. Jos asukkaita muuttaa liikaa, kunnallisveron asteittaisen alentamisen sijaan joudutaan hankkimaan lisärahoitusta nostamalla veroja. Mikä on tämän mallin mukaan kunnan asukkaiden kannalta paras väkiluku eli milloin kunnallisveroaste on kaikkein pienin?

220. Ravintola Tomato ostaa valmistajalta tomaattisosetta ja purkittaa sitä myös myyntiin. Yhden purkin kustannukset ovat 3,5 €. Tomato myy sosetta hintaan 5,5 €/purkki. Laadunvalvontaa varten otetaan päivittäin sattumanvaraisesti kaksi purkkia valmistusmäärästä ja loput saadaan myytyä.
   a) Laske kuukausivoitto $f(x)$, kun purkkeja valmistetaan x kpl päivässä. Lasketaan, että kuukaudessa on 31 päivää.
   b) Laske kuukausivoitto, kun purkkeja valmistetaan 1000 kpl päivässä.

221. Pizzayrittäjä myy pizzoja 5,60 euron kappalehintaan. Tällä hinnalla pizzoja menee kaupaksi keskimäärin kahdeksan kappaletta tunnissa. Jos yrittäjä nostaa pizzan hintaa 20 sentillä, myynti vähenee yhdellä pizzalla tunnissa.
   a) Muodosta myyntituloja (tunnissa) kuvaava funktio, kun myytyjen pizzojen määrä muuttuu x kpl.
   b) Millä hinnalla myyntitulot ovat suurimmat?
   c) Piirrä myyntituloja kuvaavan funktion kuvaaja koordinaatistoon.

222. Kannettoman, neliöpohjaisen muovisen laatikon valmistamiseen käytetään materiaalia sen verran, että laatikon pohjan ja seinien kokonaispinta-ala on 1200 cm^2. Laatikon tilavuus halutaan mahdollisimman suureksi. Määritä laatikon tilavuus, korkeus ja pohjan sivun pituus. [K2004, 13]

223. Vasikan korkeus ensimmäisen kahden vuoden ajan noudattaa funktiota $h(t) = 0{,}0025t^3 - 0{,}203t^2 + 5{,}84t + 79$, jossa h on korkeus senttimetreinä ja t aika kuukausina.
   a) Minkä ikäisenä vasikan korkeus on suurin? Laske vasikan suurin korkeus.
   b) Mikä on vasikan kasvunopeus viiden kuukauden vanhana?
   [mukailtu preli S2003, 10]

8.2 Tilastotieteen peruskäsitteitä ja tunnuslukuja

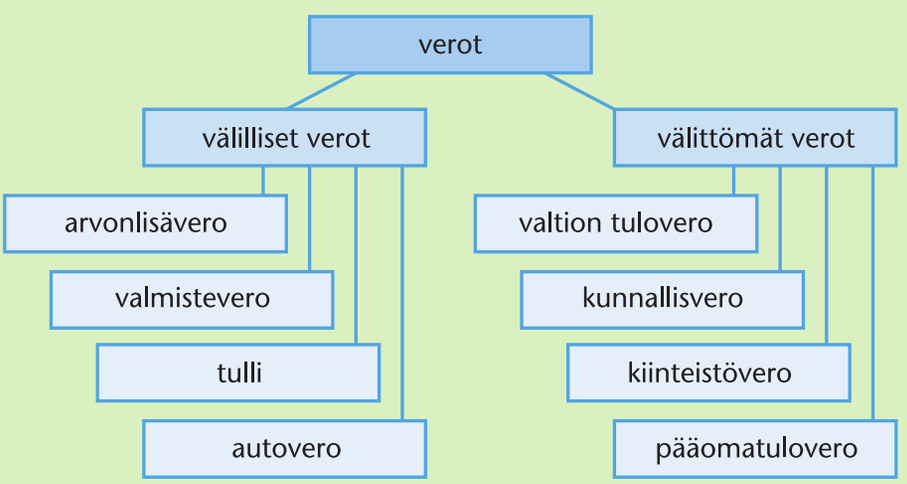
INFO

Nykyaikaisella valtiolla katsotaan olevan neljä keskeistä tehtäväaluetta:

- sisäisen ja ulkoisen turvallisuuden hoitaminen, veronkanto ja oikeudenkäyttö
- liikenne- ja tietoliikenneverkon rakentaminen ja ylläpitäminen
- sosiaalipolitiikka, terveydenhuolto ja koulutus
- valtion talouden hoitaminen, liiketoimintaan liittyvän lainsäädännön laatiminen ja elinkeinojen sekä yritystoiminnan tukeminen.

Suomi on hyvinvointivaltio, joka näkyy erityisesti valtion sosiaalipolitiikassa, terveydenhuollossa ja koulutuksessa. Valtio yhdessä kuntien kanssa on järjestänyt esimerkiksi kansalaiselle ilmaisen koulutuksen ja terveydenhuollon. Valtio rahoittaa näitä tehtäviään keräämällä veroja yksityisiltä kansalaisilta, yrityksiltä ja yhteisöiltä.

Osa veroista peritään suoraan esimerkiksi ansiotuloista. Tällaisia veroja kutsutaan välittömiksi. Kansalaiset maksavat myös monenlaisia ”piiloveroja” esimerkiksi ostamissaan tuotteissa ja palveluissa. Näitä veroja kutsutaan välillisiksi.



ESIMERKKI 1

Arvonlisäverokannat (%) eräissä EU-maissa vuonna 2004 olivat:

22	25	24	19	21
20	15	19	21	21
20	21	19	18	25

a) Luokittele aineisto neljään luokkaan ja muodosta frekvenssijakaumat.
b) Määritä frekvenssijakaumien avulla moodi ja mediaani.

RATKAISU

a) Muodostetaan frekvenssijakaumat.

Frekvenssi *f*
- muuttujan arvon lukumäärä

Suhteellinen frekvenssi *f* %
- muuttujan arvon prosenttiosuus

Summafrekvenssi *sf*
- tiettyyn muuttujan arvoon mennessä kertyneet havainnot

Suhteellinen summafrekvenssi *sf* %
- summafrekvenssi prosentteina

x	*f*	*f* %	*sf*	*sf* %
15–17	1	$\frac{1}{15} = 0{,}066\ldots \approx 7\,\%$	1	7 %
18–20	6	$\frac{6}{15} = 0{,}4 = 10\,\%$	1 + 6 = 7	$\frac{7}{15} \cdot = 0{,}466 \approx 47\,\%$
21–23	5	0,333... ≈ 33 %	12	0,8 = 80 %
24–26	3	0,2 = 20 %	15	100 %
yhteensä	15	100 %		

Moodi, Mo
- muuttujan arvoista yleisin

Mediaani, Md
- järjestetyn aineiston muuttujan arvoista keskimmäinen

b) Eniten havaintoja kuuluu luokkaan 18–20, koska sen frekvenssi on suurin. Luokitellun aineiston moodiksi annetaan yleensä moodiluokan luokkakeskus. Luokan 18–20 todellinen alaraja on 17,5 ja todellinen yläraja 20,5, eli luokkakeskus on

$$\frac{\text{todellinen alaraja} + \text{todellinen yläraja}}{2} = \frac{17{,}5 + 20{,}5}{2} = 19.$$

Moodi Mo = 19 (%).

Suhteellisen summafrekvenssin 50 %:n raja täyttyy luokassa 21–23, joten mediaani on tämän luokan luokkakeskus.

$$\frac{\text{todellinen alaraja} + \text{todellinen yläraja}}{2} = \frac{20{,}5 + 23{,}5}{2} = 22.$$

Mediaani Md = 22 (%).

VASTAUS

b) Mo = 19 % ja Md = 22 %

ESIMERKKI 2

Vaateliikkeessä myytävien samettihousujen hinta on 95 euroa. Housujen tukkuhinta myyjälle on 48 euroa. Jokaista tuotetta kohti on laskettava 4,20 euroa kuljetus- ja varastointikustannuksia. Housuista on lisäksi maksettava arvonlisäveroa 22 % housujen verottomasta hinnasta. Laske housujen veroton hinta ja myyjälle jäävä voitto. Esitä sektoridiagrammin avulla housujen myyntihinnan muodostuminen mainituista osista.

RATKAISU

Olkoon housujen veroton hinta x euroa. Kun tähän hintaan lisätään 22 % arvonlisävero, saadaan myyntihinta 95 euroa:

$$1{,}22x = 95 \quad \big| : 1{,}22$$

$$x = \frac{95}{1{,}22}$$

$$x = 77{,}8688...$$

$$x \approx 77{,}87$$

Rahamäärät voi pyöristää sentin tarkkuuteen.

Housujen veroton hinta on siis 77,87 €.

Arvonlisävero on näin ollen 95 € – 77,87 € = 17,13 €.

Kun verottomasta hinnasta vähennetään tukkuhinta sekä varastointi- ja kuljetuskustannukset, saadaan myyjälle jäävä voitto:

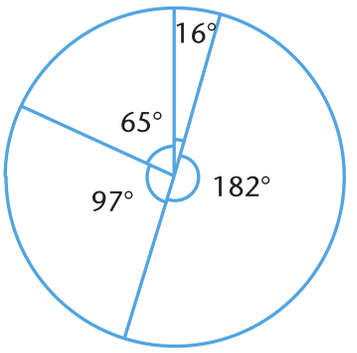
$$77{,}87\ € - 48\ € - 4{,}20\ € = 25{,}67\ €$$

Sektoridiagrammin piirtämistä varten on laskettava kunkin osan suuruus prosentteina myyntihinnasta:

kuljetus- ja varastointikustannukset	$\frac{4{,}20}{95} \cdot 100\,\% = 4{,}42...\,\%$
tukkuhinta	$\frac{48}{95} \cdot 100\,\% = 50{,}5...\,\%$
voitto	$\frac{25{,}67}{95} \cdot 100\,\% = 27{,}02...\,\%$
ALV	$\frac{17{,}13}{95} \cdot 100\,\% = 18{,}03...\,\%$

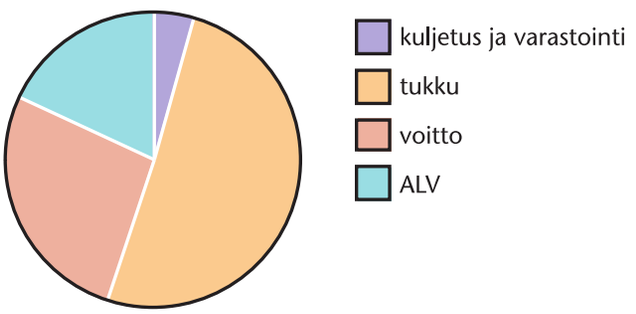
Sektoridiagrammi piirretään kulmien avulla. Koko ympyrän asteluku on 360°. Lasketaan jokaista prosenttiosuutta vastaava kulma.

	Keskuskulma
kuljetus ja varastointi	0,0442... · 360° ≈ 16°
tukkuhinta	0,505... · 360° ≈ 182°
voitto	0,270... · 360° ≈ 97°
ALV	0,180... · 360° ≈ 65°



VASTAUS

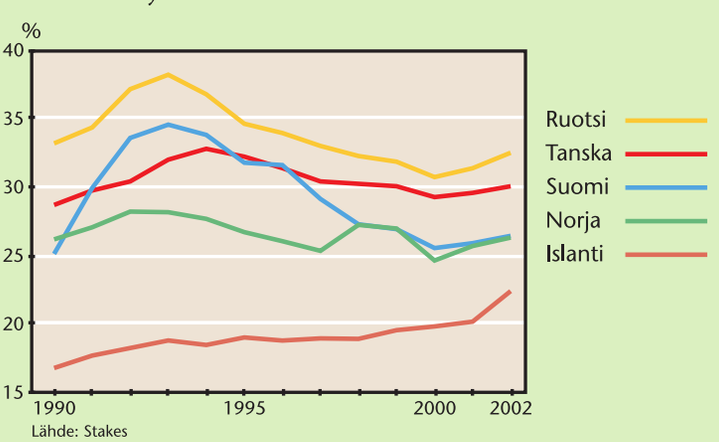
Housujen veroton hinta on 77,87 €, ja myyjälle jäävä voitto on 25,67 €.



INFO

Suomi saavutti jo muissa Pohjoismaissa olleen hyvinvointivaltion tason vasta 1980-luvulla. Hyvinvointivaltiossa jokaisella kansalaisella on sosiaalivakuutus. Sen tarkoituksena on turvata toimeentulo, jos henkilö ei itse pysty hankkimaan elatustaan esimerkiksi työkyvyttömyyden takia.

1990-luvulla sosiaaliturvaa leikattiin pahimpien lamavuosien aikana. Osa leikkauksista jäi pysyviksi. Alla olevassa kuvaajassa on esitetty Pohjoismaiden sosiaalimenojen osuuksia bruttokansantuotteesta.



Lähde: Stakes

Pahimman lamavuoden, 1993, kohdalla on selvä piikki. Tuolloin sosiaalimenoja kasvattivat erityisesti työttömyydestä aiheutuneet kustannukset; työttömyys likimain viisinkertaistui vuosien 1990–1994 välisenä aikana.

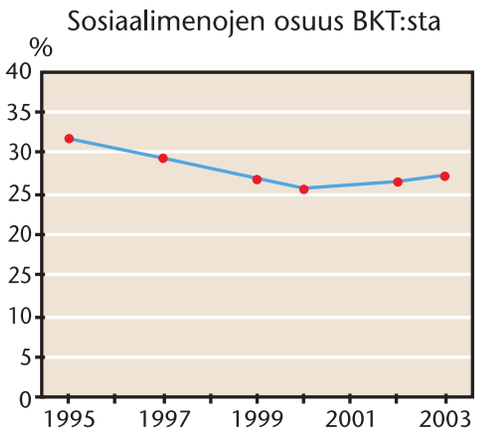
ESIMERKKI 3

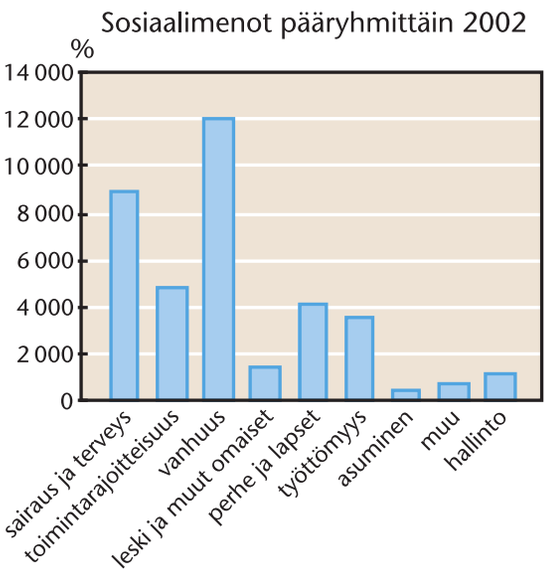
Kuvaajissa on esitelty sosiaalimenoja ja niiden osuutta bruttokansantuotteesta (BKT).

a) Milloin sosiaalimenot olivat pienimmät ja milloin suurimmat mainitulla aikavälillä? Mikä oli vuonna 2002 eniten rahaa vaativa alue?

b) Sosiaalimenot vuonna 2002 olivat yhteensä 36 908 miljoonaa euroa. Laske vuoden BKT.

c) Arvioi, kuinka monta prosenttia vuoden 2002 sosiaalimenoista kului vanhustenhuoltoon.





RATKAISU

a) Aikasarjan pienin arvo on vuoden 2000 kohdalla. Suurin taas on vuoden 1995 arvo. Vuonna 2002 suurimmat kulut aiheutuivat vanhusten huollosta.

b) Merkitään vuoden 2002 BKT:ta kirjaimella x. Sosiaalimenojen osuus oli noin 26 % eli

$$0{,}26x = 36\,908 \quad \big| : 0{,}26$$
$$x = 141\,953{,}8\ldots$$
$$x \approx 140\,000$$

BKT oli 140 000 miljoonaa euroa eli 140 miljardia euroa.

c) Vuonna 2002 vanhusten huoltoon kului kuvaajan perusteella noin 12 000 miljoonaa euroa. Sen osuus kaikista sosiaalimenoista on siis

$$\frac{12\,000}{36\,908} \cdot 100\,\% = 32{,}5\ldots\,\% \approx 33\,\%.$$

VASTAUS

b) 140 miljardia euroa c) 33 %

ESIMERKKI 4

Taulukossa on esitetty Suomen työttömyysasteita (%) vuosina 1992–2003.

1992	1993	1994	1995	1996	1997
11,7	16,3	16,6	15,4	14,6	12,7
1998	**1999**	**2000**	**2001**	**2002**	**2003**
11,4	10,2	9,8	9,1	9,1	9,0

a) Laske Suomen keskimääräinen työttömyysaste.
b) Määritä työttömyysasteen keskihajonta.
c) Arvioi keskihajonnan avulla, poikkeaako laman huippuvuoden 1994 työttömyysaste merkitsevästi keskiarvosta.

RATKAISU

a) Työttömyysasteen keskiarvo

$$\bar{x} = \frac{11{,}7 + 16{,}3 + \ldots + 9{,}1 + 9}{12} = 12{,}158\ldots \approx 12{,}2.$$

Työttömyysaste mainitulla aikavälillä oli keskimäärin 12,2 %.

b) Työttömyysasteen keskihajonta

$$s = \sqrt{\frac{(11{,}7 - 12{,}158\ldots)^2 + (16{,}3 - 12{,}158\ldots)^2 + \ldots + (9 - 12{,}158\ldots)^2}{12 - 1}}$$

Syötetään aineisto laskimeen ja lasketaan näin aineiston keskihajonta

$$s = 2{,}899\ldots \approx 2{,}9\ (\%).$$

c) Poikkeaminen on merkittävää, jos havaintoyksikkö eroaa yli kahden keskihajonnan $2s = 2 \cdot 2{,}899\ldots = 5{,}798\ldots$ verran keskiarvosta.

Vuonna 1994 työttömyysaste oli 16,6 %. Lasketaan poikkeama keskiarvosta.

$$16{,}6 - 12{,}158\ldots = 4{,}4416\ldots < 5{,}798\ldots$$

Vuoden 1994 työttömyysaste poikkeaa alle kahden keskihajonnan verran eli poikkeama ei ole merkitsevä.

Keskiarvo $\bar{x}$:

- luokittelematon aineisto

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

- luokiteltu aineisto

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{n}$$

(Otos)keskihajonta s_{n-1}:

- luokittelematon aineisto

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

- luokiteltu aineisto

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

VASTAUS

a) 12,2 % b) 2,9 % c) Ei poikkea merkittävästi.

INFO

Terveydenhuollon järjestäminen on yksi hyvinvointivaltion tärkeimmistä tehtävistä. Terveydenhuolto ei merkitse ainoastaan sairauksien hoitamista vaan myös ennaltaehkäiseviä toimenpiteitä. Terveydenhuollon järjestäminen on asetettu kuntien tehtäväksi. Valtio osallistuu tähän valtionosuusjärjestelmän muodossa ja näin omalta osaltaan rahoittaa alaa.

Eläkemenojen kasvaessa valtion on koetettava etsiä säästökohteita muista sosiaalimenoista. Maksajaksi näyttääkin joutuvan esimerkiksi terveydenhuoltoala, jossa kustannuksia on karsittu kovallakin kädellä. Ihmisten toivotaankin tulevaisuudessa käyttävän yhä enemmän yksityisiä terveydenhuoltopalveluja.

ESIMERKKI 5

Terveydenhuoltomenojen osuus BKT:sta vuosina 1990–2002 oli Norjassa keskimäärin 8,1 % keskihajonnan ollessa 0,43 %. Suomessa vastaavat luvut samalla aikavälillä olivat 7,5 % ja 0,84 %. Vuonna 2000 molemmissa maissa kustannukset olivat aikavälin pienimmät, Suomessa 6,7 % ja Norjassa 7,7 %. Kummassa maassa kustannukset putosivat suhteessa enemmän vuonna 2000?

RATKAISU

Normitettu arvo

$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$,

jossa
x = normitettava arvo
$\bar{x}$ = keskiarvo
s = keskihajonta

Kustannusten vertailemiseksi lasketaan molemmille maille vuoden 2000 kustannusten normitettu arvo z. Se kertoo, kuinka monen keskihajonnan päässä keskiarvosta vuoden 2000 arvot sijaitsevat.

Suomi: $z_{2000} = \frac{6,7 - 7,5}{0,84} = -0,952... \approx -0,95$

Norja: $z_{2000} = \frac{7,7 - 8,1}{0,43} = -0,930... \approx -0,93$

Suomen arvo on –0,95 hajonnan päässä keskiarvosta eli kauempana kuin Norjan vastaava arvo –0,93. Kustannusten notkahdus on siis suhteessa suurempi Suomessa.

VASTAUS

Kustannukset laskivat suhteessa enemmän Suomessa.

Tehtäviä

E 1

224. Taulukoon on koottu EU-maiden kasvihuonekaasupäästöt vuonna 2003 hiilidioksidiekvivalentteina. (Kasvihuonekaasujen pitoisuudet on muutettu vastaavaksi määräksi hiilidioksidia.)

Maa	milj. tonnia	Maa	milj. tonnia	Maa	milj. tonnia
Luxemburg	11,3	Ruotsi	70,6	Belgia	147,7
Tanska	74,0	Espanja	402,3	Alankomaat	214,8
Iso-Britannia	651,1	Portugali	81,2	Suomi	85,6
Italia	569,8	Saksa	1017,5	Irlanti	67,6
Ranska	557,2	Itävalta	91,6	Kreikka	137,6

Lähde: Tilastokeskus

a) Luokittele aineisto neljään luokkaan ja laadi aineiston frekvenssijakaumat.
b) Määritä frekvenssijakaumien avulla moodi ja mediaani.

E 2

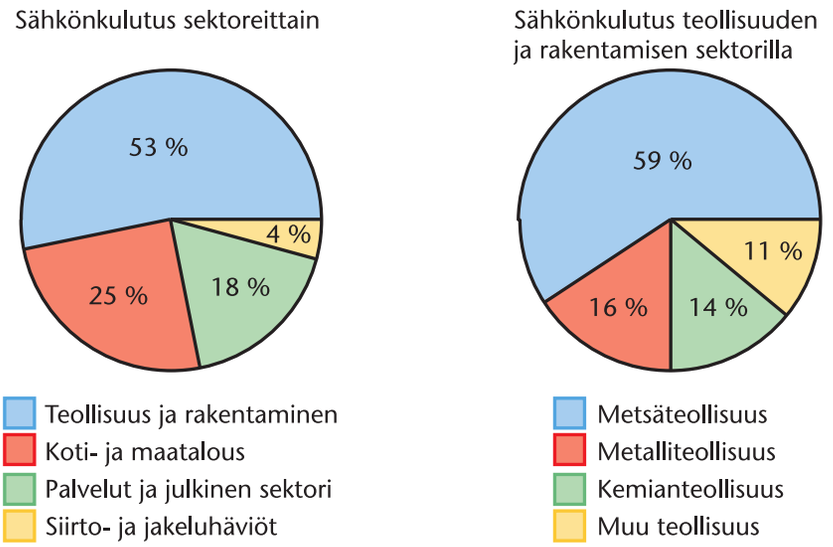
225. Suomen kautta itään tapahtuvan kauttakulkuviennin tavarajakauma vuonna 2002 käy ilmi seuraavasta taulukosta. (Luokkaan ”Erittelemätön” on kirjattu sekalaiset kuljetuserät.)

Tavararyhmä	Tavaramäärä/1000 tonnia
Elintarvikkeet	186
Kemianteollisuuden tuotteet	111
Radio-, televisio- ja tietokonelaitteet	103
Muut koneet ja laitteet	196
Muut	447
Erittelemätön	436

a) Laske kunkin tavararyhmän prosenttiosuus kauttakulkuviennin tavaramäärästä ja kuvaa jakaumaa sektoridiagrammilla. Ilmoita jokaisen sektorin keskuskulman suuruus.
b) Ryhmän ”Radio-, televisio- ja tietokonelaitteet” arvo oli 3,5 miljardia euroa, mikä oli 28 % koko kauttakulkuviennin arvosta. Mikä oli itään suuntautuvan kauttakulkuviennin kokonaisarvo vuonna 2002? [K2004, 2]

E 3

226. Sähkönkulutuksen jakauma vuonna 2001 käy ilmi alla olevista diagrammeista. Palveluiden ja julkisen sektorin kulutus oli 14 717 GWh. (Lähde: Ympäristötilasto 2002.) Kuinka suuri oli metalliteollisuuden sähkönkulutus kyseisenä vuonna? [K2003, 2]



E 4

227. Matematiikan ylioppilaskokeiden korkeimman arvosanan (laudatur) pisterajat vuosien 2000–2004 kokeissa ovat seuraavat:

Vuosi	K00	S00	K01	S01	K02	S02	K03	S03	K04	S04
pisteet	47	51	51	52	49	49	48	48	47	47

a) Laske aineiston keskiarvo ja keskihajonta.
b) Syksyllä 2001 pisteraja oli melko korkea. Poikkeaako kyseisen vuoden laudaturin pisteraja merkitsevästi keskiarvosta (havaintoyksikkö poikkeaa merkitsevästi keskiarvosta, jos se on yli kahden keskihajonnan päässä keskiarvosta)?

E 5

228. Niina ja Sampsa tutkivat oman koulunsa opiskelijoita tilastotieteen kurssilla tehtävässä projektityössä. Koulun tyttöjen pituuden keskiarvoksi tutkimuksessa saatiin 168,5 cm keskihajonnan ollessa 6,4 cm. Poikien pituuden keskiarvo tutkimuksen perusteella oli 174,8 cm ja keskihajonta 9,8 cm.
a) Niinan pituus oli 172,0 cm ja Sampsan 180,0 cm. Kumpi oli pidempi suhteessa koulun muihin samaa sukupuolta oleviin opiskelijoihin?
b) Kuinka pitkä Nellin tulisi olla, jotta hän olisi suhteessa yhtä pitkä tyttöjen joukossa kuin mitä 190,0 cm mittainen poika on omassa joukossaan?

229. Ympäristöön ja luontoon kohdistuvista rikoksista tulee vain osa poliisin tietoon. Tilastot eivät aina anna oikeaa kuvaa ympäristön tilasta, vaan ne heijastavat tutkintatoimien tarvetta. Ympäristörikoksista ilmoittavat poliisille useimmin yksityiset ihmiset.

Ympäristörikosilmoitukset (kpl)	2002	2003	2004
Ympäristön turmeleminen	127	159	138
Ympäristörikkomus	220	235	283
Tuottamuksellinen turmeleminen	11	13	5
Luonnonsuojelurikos	39	41	69
Rakennussuojelurikos	1	1	3
Törkeä ympäristön turmeleminen	7	2	2
Yhteensä	405	451	500

Lähde: Tilastokeskus

a) Laske, kuinka monta ympäristörikosta keskimäärin tehtiin vuodessa tarkastelujaksolla 2002–2004.
b) Kuinka monta prosenttia enemmän vuonna 2004 oli luonnonsuojelurikoksia kuin rakennussuojelurikoksia?

230. Taulukossa on Suomen ulkomaankaupan tuonti maaryhmittäin vuonna 2004.

Maaryhmä	Arvo (mrd €)
Euro-alue	13,7
Muut EU-maat	10,2
Muut Euroopan maat	7,2
Aasia	5,7
Pohjois-Amerikka	2,0

Lähde: Tilastokeskus

a) Kuinka monta prosenttia tuonnista tuli Pohjois-Amerikasta?
b) Kuinka monta prosenttia enemmän tuotiin Euro-alueelta kuin muista EU-maista?
c) Havainnollista tuonnin jakautumista sektoridiagrammin avulla.

231. Ongelmanratkaisukurssilla erään ongelman ratkaisemiseen kuluneet ajat on koottu seuraavaan taulukkoon.
a) Piirrä frekvenssijakaumasta histogrammi.
b) Laske keskiarvo, moodi ja mediaani. Merkitse tunnusluvut histogrammiin.

Aika (s)	0–9	10–19	20–29	30–39	40–49	50–59
f	4	3	5	8	1	2

232. Kiinteistövälitystoimistossa tutkittiin kuluneen kuukauden aikana myytyjen asuntojen kokoa (m^2).
a) Laadi aineistolle puuttuvat frekvenssijakaumat.
b) Millaisia tunnuslukuja ovat mediaani ja moodi? Määritä tälle aineistolle mainitut tunnusluvut.
c) Laske aineiston keskiarvo. Miksi mediaani ja moodi kuvaavat paremmin tätä aineistoa?

x	20–29	30–59	60–99	100–149	150–299
f	8	12	7	4	3

233. Tiia sai matematiikan pakollisista kursseista arvosanoiksi 6, 7, 6, 8, 7 ja 6.
a) Laske arvosanojen keskiarvo ja keskihajonta.
b) Mikä arvosana Tiian on tämän perusteella vähintään saatava kertauskurssista, jotta hänen lopullinen arvosanansa olisi vähintään 7?
c) Onko Tiian mahdollista saada lopulliseksi arvosanaksi päättötodistukseen numero 8?
d) Jos Tiia saa kertauskurssista arvosanan 10, niin poikkeaako tämä merkittävästi pakollisten kurssien arvosanoista?

234. Lukiossa on pidetty vuoden aikana kuusi kertaa kurssi MB1. Opettajat ovat pyrkineet pitämään kurssikokeet likimain samantasoisina. Kurssikokeista on laskettu ryhmien keskiarvot, jotka viiden ensimmäisen kurssin osalta olivat seuraavat:

Koe 1	Koe 2	Koe 3	Koe 4	Koe 5
7,2	7,1	7,8	7,0	6,8

Mikä oli kuudennen kokeen keskiarvo, kun kaikkien kuuden kokeen kokeiden keskiarvojen keskiarvo oli 7,23? Mikä oli tällöin keskihajonta?

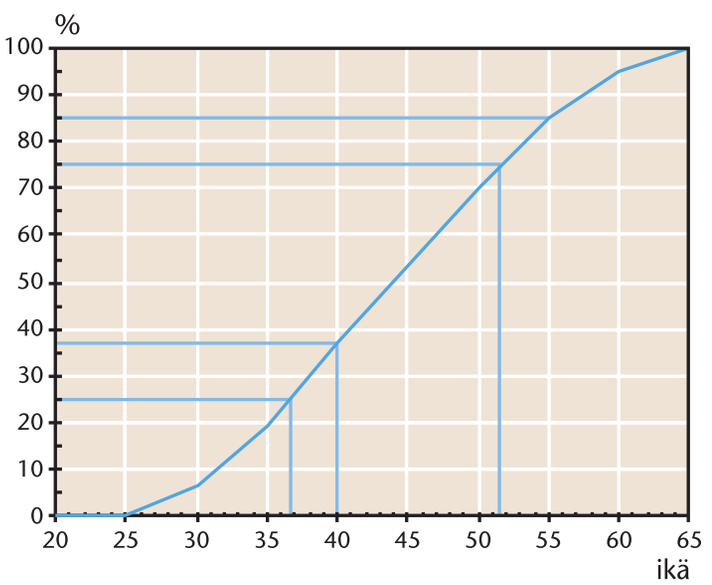
235. Erään vuoden aikana tilastoitiin sairaalan synnytysosastolla vauvojen syntymäpainoja. Painojen keskiarvo oli 3,1 kg ja keskihajonta 0,40 kg. Erään antilooppilajin syntymäpainon keskiarvo on 12,0 kg ja keskihajonta 2,4 kg. Eläintarhan antilooppinaaras pyöräytti 15,0 kg painavan jälkeläisen. Kuinka paljon pitäisi mainitussa sairaalassa syntyvän vauvan painaa, jotta se olisi suhteessa yhtä painava?

236. Pirkka tutki jääkaappipakastimensa sisältöä. Hän punnitsi sieltä löytämänsä tuotteet ja kokosi tiedot taulukkoon.

Massa (g)	0–99	100–199	200–299	300–399	400–499
f	12	31	48	25	15

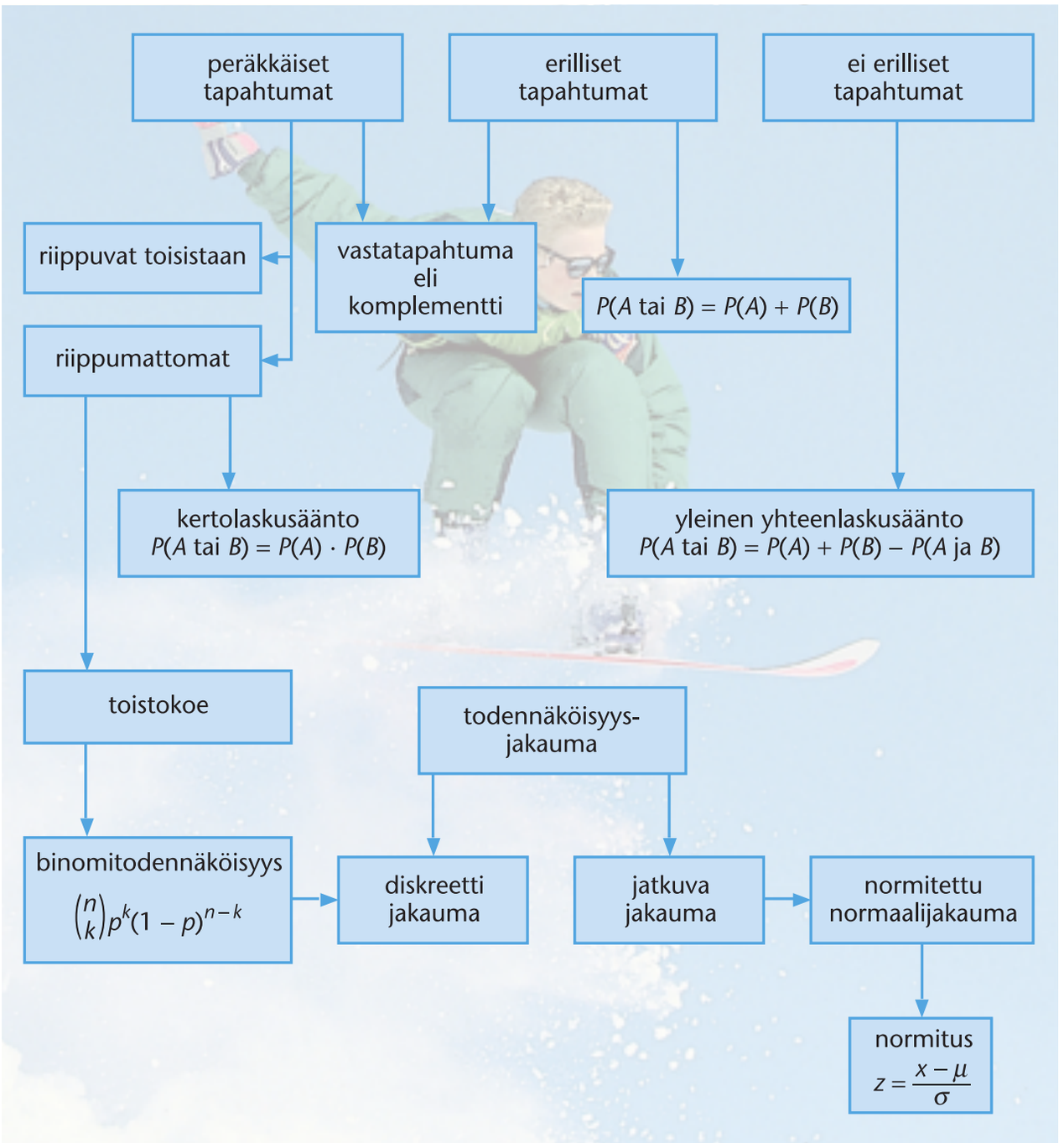
a) Muodosta suhteellinen summafrekvenssijakauma ja piirrä sen kuvaaja. Määritä kuvaajan avulla mediaani.
b) Määritä kuvaajan avulla, kuinka paljon saa korkeintaan painaa tuote, joka kuuluu kevyimpään tuoteneljännekseen? Entä kuinka paljon tuotteen tulee vähintään painaa, jotta se kuuluisi raskaimpaan tuoteneljännekseen?

237. Kuvion summafrekvenssikuvaaja esittää ammatissa toimivien lääkärien ikäjakauman vuonna 2001 (Lähde: Terveydenhuollon ammattihenkilöt 31.12.2001, Stakes 5/2002). Arvioi kuvaajan perusteella
a) lääkäreiden mediaani-ikä
b) ikä, jonka 25 % lääkärikunnasta alitti
c) ikä, jonka 25 % lääkärikunnasta ylitti
d) kuinka monta prosenttia lääkärikunnasta oli 40 vuotta täyttäneitä
e) kuinka monta prosenttia enemmän oli alle 35-vuotiaita lääkäreitä kuin 55 vuotta täyttäneitä. [S2004, 3]



238. Toisen asteen polynomifunktiolla $f(x) = x^2 + 3ax + 2b$ on kaksi nollakohtaa, $x = a$ ja $x = b$. Nollakohtien keskiarvo on –3. Määritä näiden tietojen avulla funktion f kuvaajan huippupisteen koordinaatit.

9 Vapaa-aika


peräkkäiset tapahtumat
erilliset tapahtumat
ei erilliset tapahtumat
riippuvat toisistaan
vastatapahtuma eli komplementti
P(A tai B) = P(A) + P(B)
riippumattomat
kertolaskusääntö
P(A tai B) = P(A) · P(B)
yleinen yhteenlaskusääntö
P(A tai B) = P(A) + P(B) − P(A ja B)
toistokoe
todennäköisyys-jakauma
binomitodennäköisyys
$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
diskreetti jakauma
jatkuva jakauma
normitettu normaalijakauma
normitus
$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

9.1 Todennäköisyyden perustilanteita

INFO

Suomessa pelataan aktiivisesti erilaisia joukkuepelejä. Suomalaiset ovat myös innokkaita penkkiurheilijoita. Talvisaikaan seurataan ja harrastetaan runsaasti jääkiekkoa ja kaukalopalloa. Jääkenttien uusi tulokas on curling. Kesäisin katsomot täyttyvät jalkapallon sekä pesäpallon ystävistä. Pesäpalloa voidaan pitää suomalaisena kansallispelinä. Sen kehitti Tahko Pihkala yhdistelemällä ruotsalaista långbollia, amerikkalaista baseballia ja vanhaa suomalaista kuningaspalloa. Näin syntyi nykymuotoisen pesäpallon edeltäjä pitkäpallo.

Ensimmäinen nykymuotoinen pesäpallopeli pelattiin Helsingissä Kaisaniemen kentällä vuonna 1920. Viralliset pelit aloitettiin 1922. Kymmenen vuotta myöhemmin käynnistettiin Itä–Länsi-ottelut. Lajin suosio johtuu sen tärkeästä asemasta koululiikunnassa. Pesäpalloa pidetään monipuolisena urheilumuotona: juoksemisen ohessa se kehittää tarkkaavaisuutta sekä silmän ja käden koordinaatiota.

Lajin sääntöjä on muokattu useampaankin kertaan kuluneina vuosikymmeninä. Pelistä on pyritty tekemään yleisölle kiinnostavampi, missä onkin onnistuttu. Lajin suosiosta kertoo myös se, että useimmissa kunnissa on oma pesäpallojoukkue.

Pesäpallojoukkueessa on enintään kaksitoista pelaajaa, joista kolme on vain sisävuorossa pelaavia jokeripelaajia. Yksi joukkueen jäsenistä on kapteeni. Pelaajien lisäksi joukkueella voi olla enintään kaksi pelinjohtajaa.

ESIMERKKI 1

Curlingista tuli suosittu harrastus Torinon olympialaisten 2006 jälkeen. Curling-pesä on ympyrä, joka muodostuu erilevyisistä kehistä. Uloimman kehän halkaisija on noin 366 cm. Pienimmän kehän halkaisija on 30 cm, ja sitä kutsutaan nänniksi. Kivi heitetään umpimähkään pesään. Laske todennäköisyys, että kiven keskipiste pysähtyy nänniin.

RATKAISU

Geometrinen todennäköisyys

- alkeistapauksia ääretön määrä
- geometrisesti suotuisan alueen suhde koko alueeseen

Suotuisa alue, jolla kiven keskipiste saa sijaita, on siis sisin ympyrä. Sisimmän ympyrän säde on 30 cm : 2 = 15 cm.

$$A = \pi \cdot (15\ \text{cm})^2 = 225\pi\ \text{cm}^2$$

Koko pesäalueen säde on 366 cm : 2 = 183 cm.
Koko pesäalueen pinta-ala on $A = \pi \cdot (183\ \text{cm})^2 = 33\,489\pi\ \text{cm}^2$.

Todennäköisyys, että keskipiste pysähtyy nänniin, on

$$\frac{A_{\text{sisin}}}{A_{\text{koko}}} = \frac{225\pi\,\text{cm}^2}{33\,489\pi\,\text{cm}^2} = 0{,}00671\ldots \approx 0{,}0067.$$

VASTAUS 0,0067

ESIMERKKI 2

Koulun pesäpallojoukkueessa on 12 pelaajaa.

a) Joukkue arpoo keskuudestaan kolme jokeripelaajaa, jotka eivät osallistu ulkovuoroon. Millä todennäköisyydellä jokeripelaajia ovat joukkueen jäsenet Seppo, Heikki ja Lassi?

b) Kaikille kolmelle ulkopesälle tarvitaan polttaja. Polttajat valitaan arpomalla. Kuinka monella tavalla polttajat voidaan valita, kun jokereiksi valitut pelaajat eivät osallistu arvontaan?

c) Kauden ensimmäisen pelin lyöntijärjestys arvotaan. Kuinka monta erilaista järjestystä on olemassa?

RATKAISU

Tuloperiaate

- peräkkäiset valinnat kerrotaan keskenään

Kertoma

- n alkiota voidaan järjestää $n!$ eri tavalla.

Osajoukot

- n:stä alkiosta voidaan valita k alkiota

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

eri tavalla

a) Joukkueen 12 pelaajan joukosta voidaan valita 3 pelaajaa

$$\binom{12}{3} = 220$$

eri tavalla. Yhdistelmä, jossa jokeripelaajina ovat Seppo, Heikki ja Lassi, on yksi näistä.

$$P(\text{"jokereina Seppo, Heikki ja Lassi"}) = \frac{1}{220} = 0{,}00454... \approx 0{,}0045$$

b) Ensimmäiselle pesälle polttaja voidaan valita 9 tavalla. Tällöin toiselle pesälle on jäljellä enää 8 vaihtoehtoa ja kolmospesälle 7 vaihtoehtoa. Tuloperiaatteen mukaan polttajat voidaan siis valita

$$9 \cdot 8 \cdot 7 = 504 \text{ erilaisella tavalla.}$$

c) Lyöntijärjestyksen arvontaan osallistuvat kaikki 12 pelaajaa. Tuloperiaatteen mukaan erilaisia järjestyksiä on siis

$$12 \cdot 11 \cdot 10 \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 12! = 479\,001\,600$$

VASTAUS

a) 0,0045 b) 504 c) 479 001 600

INFO

Inter Rail on hyvä vaihtoehto tutustua maailmaan. Inter Raililla tarkoitetaan vapaata junamatkailua Euroopassa, Turkissa ja Marokossa. Inter Rail -kortilla voi matkustaa vapaasti lähes 30 eri maassa. Suomen junalipun hinnoista kortilla saa 50 % alennuksen. Myös osa laivayhteyksistä on kortilla maksuttomia, osasta kortilla saa alennusta.

Reilaaminen on tehty varsin helpoksi. Valittavana on joko koko Euroopan kiertelyyn oikeuttava kuukauden passi tai kahdeksan vaihtoehtoista, kolmesta viiteen maata sisältävää vyöhykekorttia. Inter Rail -kortin voi ostaa maksimissaan kuukauden ajaksi, ja sen hinta määräytyy matkustusalueen ja henkilön iän mukaan. Tärkeää ei ole se, minne matkustaa, vaan että matkustaa.

ESIMERKKI 3

Jarkko ja Petteri ovat Inter Rail -matkalla Roomassa. Rooman linja-autoasemalta lähtee kahdesti tunnissa bussi esikaupunkialueelle. Bussi saapuu laiturille 10 min ennen lähtöä. Toisistaan eksyneet Jarkko ja Petteri saapuvat asemalle sattumanvaraisesti klo 11–12 välillä. Oletetaan, että tapahtumat ovat riippumattomia toisistaan. Millä todennäköisyydellä pojat
a) ehtivät jompaankumpaan bussiin kuluvan tunnin aikana
b) ehtivät samaan bussiin tämän kuluvan tunnin aikana?

RATKAISU

Kertolaskusääntö

- riippumattomille tapahtumille A ja B

$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B)$

a) Todennäköisyys ehtiä bussiin $P(\text{”ehtii bussiin”}) = \dfrac{20\,\text{min}}{60\,\text{min}} = \dfrac{1}{3}$.

Todennäköisyys, että Jarkko ja Petteri molemmat ehtivät bussiin, on

$$P(\text{”Jarkko ja Petteri ehtivät”}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11.$$

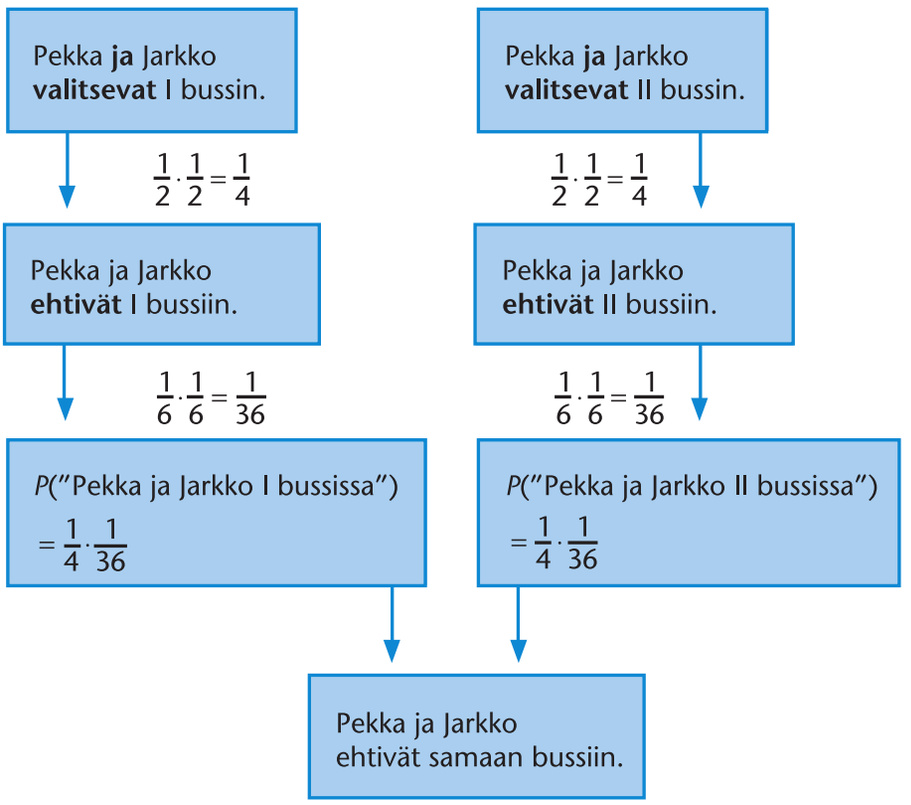
b) Todennäköisyys valita sama bussi on

$$P(\text{”sama bussi”}) = \frac{1}{2}.$$

Todennäköisyys ehtiä valittuun bussiin on

$$P(\text{”ehtii”}) = \frac{10\,\text{min}}{60\,\text{min}} = \frac{1}{6}.$$

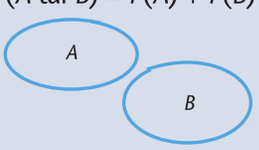
Tarkastellaan tilannetta mallin avulla.



Yhteenlaskusääntö

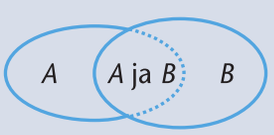
- erillisille tapahtumille A ja B

$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B)$



- jos eivät erillisiä tapahtumia

$P(A \text{ tai } B)$
$= P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B)$



Mallin kaksi tapausta ovat vaihtoehtoisia, joten

$$P(\text{”pojat ehtivät samaan bussiin”})$$
$$= P(\text{”ehditään I bussiin”}) + P(\text{”ehditään II bussiin”})$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{36} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{36} = 0{,}0138... \approx 0{,}01$$

VASTAUS a) Todennäköisyys on 0,11. b) Todennäköisyys on 0,01.

INFO

Oopperajuhlia on vietetty Savonlinnassa ensimmäistä kertaa jo vuonna 1912. Tuolloin järjestäjänä toimi maailmankuulu laulaja Aino Ackté. Vuoden 1930 jälkeen taloudelliset ongelmat kasvoivat niin suuriksi, että juhlia ei voitu enää järjestää. Niiden suuri suosio oli ehtinyt jo siitä huolimatta levitä ulkomaille. Vuonna 1955 professori Peter Klein sai innostuksen Savonlinnan musiikkijuhlilla jatkaa Oopperajuhlia Savonlinnassa.

Vuonna 2006 tuli kuluneeksi 30 vuotta siitä, kun Savonlinnan Oopperajuhlat alkoivat uudelleen Aino Acktén ajan jälkeen.

ESIMERKKI 4

Riina, Sanni ja Kirsi ovat ostaneet liput Savonlinnan Oopperajuhlien ensi-iltaan. Lippuja oli myyty seuraavasti: 15 % opiskelijoita, 48 % aikuisia, 1 % lapsia ja loput eläkeläisiä. Millä todennäköisyydellä

a) Sanni tai Kirsi on opiskelija

b) ainakin yksi heistä on ostanut aikuisten lipun?

RATKAISU

a) 15 % myydystä lipuista on opiskelijalippuja, joten

$$P(\text{”opiskelija”}) = 0{,}15.$$

Tämän vastatapahtuman ”ei opiskelija” todennäköisyys on

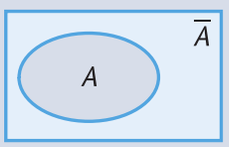
$$P(\text{”ei opiskelija”}) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85.$$

Tapahtuma ”Sanni tai Kirsi on opiskelija” tarkoittaa, että Sanni on opiskelija tai Kirsi on opiskelija tai molemmat ovat opiskelijoita.

$$\begin{aligned} &P(\text{”Sanni opiskelija ja Kirsi ei”}) \\ &= P(\text{”Kirsi opiskelija ja Sanni ei”}) \\ &= 0{,}15 \cdot 0{,}85 \end{aligned}$$

Vastatapahtuma eli komplementti

- tapahtuman A komplementti $\overline{A}$



$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

$P(A) = 1 - P(\overline{A})$

$$P(\text{”Sanni ja Kirsi opiskelijoita”}) = 0{,}15 \cdot 0{,}15$$

$$P(\text{”Sanni tai Kirsi opiskelija”}) = 0{,}15 \cdot 0{,}85 + 0{,}15 \cdot 0{,}85 + 0{,}15 \cdot 0{,}15$$
$$= 0{,}2775 \approx 0{,}28$$

b) Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla. Vastatapahtuma on ”yksikään tytöistä ei ole ostanut aikuisten lippua”.

$$P(\text{”aikuinen”}) = 0{,}48 \qquad P(\text{”ei aikuinen”}) = 1 - 0{,}48 = 0{,}52$$
$$P(\text{”tytöillä ei aikuisten lippua”}) = 0{,}52 \cdot 0{,}52 \cdot 0{,}52 = 0{,}140608$$

Kysytty todennäköisyys on siis

$$\begin{aligned} &P(\text{”ainakin yksi ostanut aikuisten lipun”}) \\ &= 1 - P(\text{”tytöillä ei aikuisten lippua”}) \\ &= 1 - 0{,}140608 \\ &= 0{,}859392 \\ &\approx 0{,}86 \end{aligned}$$

VASTAUS a) Todennäköisyys on 0,28. b) Todennäköisyys on 0,86.

ESIMERKKI 5 Teatterilippuja voidaan varata mm. puhelimitse. Puhelinvaihteeseen minuutissa tulevien puhelujen määrän $n \geq 0$ todennäköisyyttä kuvattiin mallilla $p = \frac{a^n}{n!} \cdot 2{,}72^{-a}$, jossa vakio $a = 3$ kuvaa keskuksen ruuhkaisuutta. Laske todennäköisyys, että keskukseen tulee

a) korkeintaan yksi puhelu minuutissa
b) ainakin kaksi puhelua minuutissa.

RATKAISU a) Korkeintaan yksi puhelu minuutissa tarkoittaa tapahtumia ei yhtään tai yksi puhelu minuutissa.

Keskukseen tulee yksi puhelu ($n = 1$) minuutissa todennäköisyydellä

$$\frac{3^1}{1!} \cdot 2{,}72^{-3} = 0{,}149...$$

Ei yhtään puhelua ($n = 0$) minuutissa saadaan todennäköisyydellä

$$\frac{3^0}{0!} \cdot 2{,}72^{-3} = 0{,}049...$$

$$P(\text{”korkeintaan yksi puhelu”}) = 0{,}149... + 0{,}049... = 0{,}198... \approx 0{,}20$$

b) Tapahtuman ”ainakin kaksi puhelua” vastatapahtuma on ”ei yhtään tai yksi puhelu”.

$$P(\text{”ainakin kaksi puhelua”}) = 1 - 0{,}198... = 0{,}801... \approx 0{,}80$$

VASTAUS a) Todennäköisyys on 0,20. b) Todennäköisyys on 0,80.

Tehtäviä

E 1

239. Tikkataulun säde on 20 cm. Laske todennäköisyys, että
a) Pertun heittämä tikka osuu 9:ään tai 10:een.
b) Pertun heittämä tikka osuus 7:ään tai 8:aan.
c) Pertun heittämästä viidestä tikasta ainakin kaksi osuu 9:ään tai 10:een.

E 2

240. Urheilukentällä on lasten jalkapalloharjoitukset. Paikalle pääsee 15 innokasta pelaajaa, joista 8 on poikaa ja 7 tyttöä. Kaikki eivät kuitenkaan voi olla kentällä samaan aikaan, joten joukkueet muodostetaan sattumanvaraisesti. Kuinka monella tavalla
a) kaikki voivat aluksi asettua jonoon niin, että joka toinen on tyttö
b) kaksi maalivahtia voidaan valita
c) ensimmäinen joukkue voidaan valita niin, että siinä on kaksi tyttöä ja kolme poikaa, kun maalivahdiksi on jo valittu tyttö?
d) Millä todennäköisyydellä kaksi poikaa on maalivahteina?

E 3

241. Kotipolulla on uusi omakotitalo. Asukkaat ovat suunnitelleet muuttavansa kahden viikon aikana. Joka kymmenenteen rakenteilla olevaan taloon murtaudutaan. Painavien esineiden kuljettaminen ei onnistu kantamalla, joten todennäköisyys, että perintölipasto varastetaan, on 0,15. Todennäköisyys, että varastetaan koruja ja muita pieniä arvoesineitä on 0,93. Laske todennäköisyys, että
a) asukkaat muuttavat kolmen ensimmäisen päivän aikana ja tänä aikana taloon murtaudutaan
b) asukkaat muuttavat kolmen ensimmäisen päivän aikana, taloon murtaudutaan ja perinnelipasto viedään
c) asukkaat muuttavat toisena päivänä ja taloon ei murtauduta tai asukkaat muuttavat kolmen päivän aikana, taloon murtaudutaan ja muita arvoesineitä varastetaan.

E 4

242. Antin, Bertan ja Camillan arvioidaan onnistuvan autokoulun inssiajossa tässä järjestyksessä todennäköisyyksin 60 %, 65 % ja 70 %. Laske todennäköisyys, että
a) heistä ainakin yksi onnistuu ajokokeessa
b) Antti tai Bertta onnistuu ajokokeessa. [preli K2005, 5]

E 5

243. Liikenneministeriön teettämässä tutkimuksessa kotitalouksien autoistumista selitettiin mallilla
$y = 0{,}21a + 0{,}36b + 0{,}20c + 0{,}34d - 0{,}26$, jossa y ilmoittaa, millä todennäköisyydellä tietyntyyppisellä kotitaloudella on auto käytettävissään. Selittävinä muuttujina mallissa ovat a = perhetyyppi, b = tulot, c = perheen päämiehen ikä ja d = asuinkunnan kaupunkimaisuus. Keskituloisella kahden huoltajan lapsiperheellä, jonka päämiehen ikä on 30 vuotta, on $a = 0{,}93$, $b = 0{,}79$, $c = 1{,}35$. Millä todennäköisyydellä kuvatunlaisella kotitaloudella on käytettävissään auto, jos perheen asuinkunta on
a) kaupunkimainen, jolloin $d = 0{,}78$
b) maaseutumainen, jolloin $d = 1{,}01$? [S2002, 3]

244. Rulettipöydässä on 18 mustaa ja 18 punaista ruutua sekä yksi väritön nolla. Pelaaja asettaa kolmella kierroksella panoksensa nollalle. Millä todennäköisyydellä hän voittaa kerran?

245. Tien varrella olevan levähdyspaikan lammikosta voi onkia maksua vastaan kaloja. Lammikossa on 35 lohta ja 15 haukea. Petteri onkii kolme kalaa. Millä todennäköisyydellä
a) kaikki kolme ovat lohia
b) kaksi kaloista on haukia
c) ainakin yksi on hauki?

246. Ruuhkabussi on aamulla myöhässä todennäköisyydellä 0,15. Millä todennäköisyydellä kouluviikon aikana opiskelija myöhästyy koulusta bussin takia
a) ainakin kerran b) täsmälleen kerran?

247. Reko on pakannut laskettelumatkaansa varten matkalaukkuunsa viisi erilaista pipoa, kaksi laskettelutakkia, kolmet lasketteluhousut ja neljät laskettelurukkaset. Matkalaukussa on kuitenkin liikaa tavaraa, joten Reko päättää ottaa laukusta pois yhden pipon, yhden takin, yhdet housut ja yhdet rukkaset. Kaikissa vaatteissa on yhdet punaiset kappaleet. Millä todennäköisyydellä Reko poistaa matkalaukustaan kaikki punaiset lasketteluvaatteet?

248. Sanni käyttää kumihansikkaita istuttaessaan siemeniä. Kasvihuoneessa on kassissa neljä paria keltaisia, kolme paria sinisiä ja kaksi paria vihreitä käsineitä. Sanni ottaa kassista umpimähkään kaksi käsinettä.
a) Millä todennäköisyydellä molemmat ovat keltaisia?
b) Millä todennäköisyydellä molemmat ovat keltaisia tai vihreitä?

249. Matkatoimisto järjestää lomamatkoja Espanjan aurinkorannikolle.
   a) Malagan kentällä lomailijoita on vastassa kolme turistibussia. Ensimmäinen bussi lähtee käyntiin todennäköisyydellä 95 %. Toisen bussin käynnistymisen todennäköisyys on 80 %, ja kolmas bussi käynnistyy todennäköisyydellä 75 %. Millä todennäköisyydellä kaikki kolme bussia pääsevät matkaan lentokentältä?
   b) Busseissa olevista turisteista 5 % ei ymmärrä suomea. Matkaopas juttelee kahdeksan satunnaisesti valitun turistin kanssa suomeksi. Millä todennäköisyydellä nämä turistit ymmärtävät matkaopasta?

250. Oona tutki oman koulunsa opiskelijoita.
   a) Opiskelijoista 20 % on 16-vuotiaita. 17-vuotiaita opiskelijoita on 30 % koko koulun oppilasmäärästä. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu opiskelija on 16- tai 17-vuotias?
   b) Koulun opiskelijoista 20 % puhuu mielestään hyvin saksaa ja 30 % mielestään hyvin ruotsia. Molempia kieliä puhuu hyvin 10 % opiskelijoista. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu koulun opiskelija puhuu hyvin saksaa tai ruotsia?

251. Raketti ja Salama ovat ravihevosia, joiden voittotodennäköisyydet kilpailuissa ovat 0,60 ja 0,80. Hevoset juoksevat eri lähdöissä. Hessu lyö vetoa molempien hevosten voiton puolesta. Millä todennäköisyydellä hän voittaa vain toisen vedon?

252. Tietokonepelissä heitetään virheellistä noppaa, jossa nopan silmälukujen todennäköisyydet ovat suoraan verrannollisia silmälukuihin. Mitkä ovat eri silmälukujen todennäköisyydet? Mikä on todennäköisyys saada kahdella heitolla kaksi kuutosta? [S2001, 9]

253. Kokelaan ylioppilastutkinnon matematiikan koe muodostuu 10 tehtävästä. Vanhanmuotoisessa matematiikan kokeessa oli 10 tehtävää ja osassa tehtävistä oli kaksi vaihtoehtoa, joista sai laskea vain toisen; nykyisessä kokeessa saa 15 tehtävästä vapaasti valita suoritettavakseen 10 tehtävää. Kuinka monta erilaista 10 tehtävän kokonaisuutta on
   a) vanhanmuotoisessa kokeessa, jossa viidessä tehtävässä on kaksi vaihtoehtoa
   b) nykyisessä uudenmuotoisessa kokeessa? [S2000, 8]

254. Kuusi henkilöä on kokoontunut illanviettoon.
   a) He pelaavat illan aluksi Alias-peliä, jota pelataan pareittain muita pareja vastaan. Jos jokainen pelaa yhden pelin jokaisen muun henkilön kanssa, kuinka monta peliä yhteensä on pelattava?
   b) Seuraavaksi siirrytään pelaamaan 3 hengen joukkueissa Trivial Pursuit -peliä. Joukkueet arvotaan. Millä todennäköisyydellä paikalla olevat Matti ja Maija pääsevät samaan joukkueeseen?

255. Lottoarvonnassa arvotaan 7 palloa 39:stä. Lottoaja on pelannut yhden 7 numeron kupongin. Kumman todennäköisyys on suurempi
   a) kupongissa ei ole yhtään numeroa oikein vai
   b) kupongissa on ainakin yksi numero oikein?

256. Sanni on hukannut multasäkkiin sormuksen. Pussissa on multaa 15 l. Sanni ottaa pussista kaksi kourallista multaa. Millä todennäköisyydellä sormus löytyy tästä multamäärästä, kun kourallinen on noin 1,5 dl?

257. Englantilaisen jouluvanukkaan sisään on tapana piilottaa pieniä symbolisia esineitä. Kokki leipoo suoran ympyrälieriön muotoisen vanukkaan sisään sormuksen. Ruokailija leikkaa vanukkaasta sektorin muotoisen palasen, jonka pohjan ala on 2,5 cm^2 ja korkeus 8,0 cm. Millä todennäköisyydellä hän saa sormuksen, kun vanukkaan tilavuus on 1,4 litraa?

9.2 Todennäköisyysjakaumia

INFO

Tietoliikenne on tiedon välittämistä esimerkiksi puheena tai kuvana tieto- tai puhelinverkkojen kautta. Tietoliikenteen ensimmäiset muodot olivat kirjekyyhkyjen välityksellä lähetetyt kirjeet sekä valo- ja savumerkit. Jo 1700-luvulla oli Ranskassa käytössä valomerkkeihin perustuva optinen viestitysverkko.

Kun langallinen lennätin keksittiin, voitiin tietoa välittää sähköisesti mm. Atlantin poikki kaapelia pitkin. Langattoman lennättimen keksiminen toi lisää keinoja tiedon siirtoon. Tällöin kaapelia ei tarvinnut enää vetää kaikkiin niihin paikkoihin, joihin viestejä haluttiin lähettää.

Italialainen keksijä Antonio Meucci keksi puhelimen vuonna 1849. Hän kutsui keksintöään nimellä teletrophone. Puhelimen ehti kuitenkin ensimmäisenä patentoimaan skotlantilaissyntyinen Alexander Graham Bell. Ensimmäinen tällainen sähköisten signaalien avulla toimiva laite saatiin Suomeen vuonna 1877, vain vuosi patentoinnin jälkeen.

Puhelimen keksimisen seurauksena taloja liitettiin kuparikaapelin avulla kiinteään puhelinverkkoon. Verkkojen digitalisointi aloitettiin 1980-luvulla, jolloin siirryttiin kuparikaapeleista optiseen tiedonsiirtoon lasikuitukaapelia pitkin.

Viimeisen vuosikymmenen aikana lankapuhelimista on vähitellen siirrytty radiotekniikkaa hyödyntäviin matkapuhelimiin. Tänä päivänä tavallisen matkapuhelintekniikan rinnalle on noussut satelliittipuhelintekniikka. Satelliittipuhelin on yhteydessä avaruuteen sijoitettuun satelliittiin suoraan tai tukiaseman kautta.

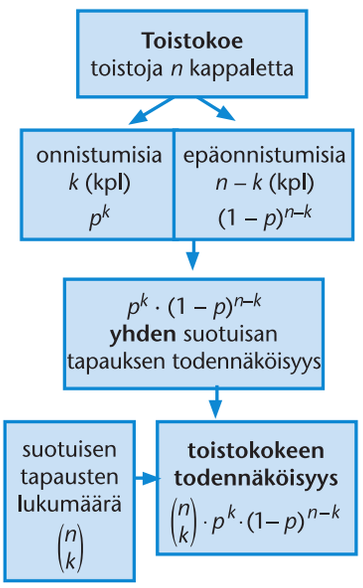
ESIMERKKI 1

Niina ja Outi ovat ostosmatkalla Sanghaissa. Tavaratalossa tytöt eksyvät toisistaan. Matkamuistokojua tutkiessaan Niina yrittää näppäimiä katsomatta lähettää tekstiviestiä Outille: ”Mennään kahville”. Niina muistaa, missä näppäimissä tarvittavat kirjaimet ovat, mutta ei pysty huomioimaan, kuinka monta kertaa näppäintä on painettava. Valinta on joka kerralla umpimähkäinen. Kussakin näppäimessä on kolme eri kirjainta (ensimmäinen kirjain saadaan kertapainalluksella, toinen kirjain kahdesti painamalla jne.).

a) Millä todennäköisyydellä viesti on aivan oikein?

b) Millä todennäköisyydellä viestissä on yksi virhe?

RATKAISU



a) Viestissä on 15 kirjainta. Kukin kirjain valitaan näppäimestä umpimähkään kolmen vaihtoehdon joukosta. Tällöin

$$P(\text{”näppäily oikein”}) = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{”15 kirjainta näppäilty oikein”}) = \left(\frac{1}{3}\right)^{15} \approx 7{,}0 \cdot 10^{-8}$$

b) Yksi virhe voi tapahtua $\binom{15}{1} = 15$ eri kohdassa.

$$P(\text{”näppäily väärin”}) = 1 - P(\text{”näppäily oikein”}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(\text{”yksi virhe 15 kirjaimen joukossa”}) = \overbrace{\binom{15}{1}}^{\substack{\text{virheelle 15 mahdollisuutta} \\ \text{epäonnistumisia 1 kpl} \\ \text{onnistumisia 14 kpl}}} \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{14}$$

$$= 15 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{14} \approx 2{,}1 \cdot 10^{-6}$$

VASTAUS

a) Todennäköisyys on $7{,}0 \cdot 10^{-8}$. b) Todennäköisyys on $2{,}1 \cdot 10^{-6}$.

ESIMERKKI 2

Tavaratalon levyosastolla on 24 levynkuuntelupaikkaa. Kuuntelupaikka on varattu todennäköisyydellä 0,9. Niina ja Outi haluaisivat kuunnella erästä uutuuslevyä. Millä todennäköisyydellä
a) kaksi kuuntelupaikkaa on vapaana
b) Outi ja Niina pääsevät molemmat heti kuuntelemaan levyä?

RATKAISU

a) Koska kuuntelupaikka on varattu todennäköisyydellä 0,9, niin se on vapaa todennäköisyydellä $1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Levyosastolla olevista kuuntelupaikoista kaksi paikkaa voidaan valita $\binom{24}{2} = 276$ eri tavalla.

$$P(\text{”24 paikasta kaksi on vapaana”}) = \binom{24}{2} 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{22} = 276 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{22} = 0{,}271... \approx 0{,}3$$

b) Kysytään todennäköisyyttä, milloin 24 paikan joukossa ainakin kaksi paikkaa on vapaana. Vastatapahtuma on ”24 paikan joukossa vain yksi tai ei yhtään vapaata paikkaa”.

Yksi vapaa paikka voidaan valita $\binom{24}{1} = 24$ eri tavalla.

$$P(\text{”24 paikasta yksi vapaana”}) = 24 \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{23} = 0{,}212...$$

$$P(\text{”kaikki 24 paikkaa varattu”}) = 0{,}9^{24} = 0{,}079...$$

$$\begin{aligned} &P(\text{”ainakin kaksi vapaata paikkaa”}) \\ &= 1 - P(\text{”yksi tai ei yhtään vapaata paikkaa”}) \\ &= 1 - (0{,}212... + 0{,}079) \\ &= 1 - 0{,}292... \\ &= 0{,}707... \\ &\approx 0{,}7 \end{aligned}$$

VASTAUS

a) Kaksi paikkaa on vapaana todennäköisyydellä 0,3.
b) Molemmat saavat kuuntelupaikan todennäköisyydellä 0,7.

ESIMERKKI 3

Kaupallisen TV-kanavan rekisteröityjen katsojien keskuudessa toteutettiin kysely, jossa tiedusteltiin katsojan ikää ja päivittäistä katseluaikaa. Tulokset koottiin ja todettiin, että ikä noudatti normaalijakaumaa $N(28, 3)$ ja aika normaalijakaumaa $N(3{,}5\text{ h};\ 0{,}65\text{ h})$. Ikä ja katseluaika olivat riippumattomia.

a) Mikä on todennäköisyys, että katsojien joukosta löytyy henkilö, jonka ikä on 26–36 vuotta?

b) Millä todennäköisyydellä 100 katsojan joukosta löytyy ainakin yksi henkilö, jonka ikä on yli 36 vuotta ja päivittäinen katseluaika yli 5 tuntia?

RATKAISU

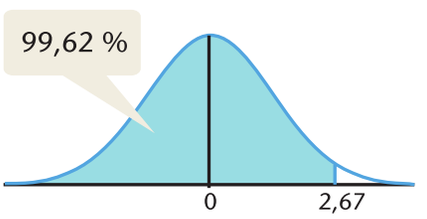
a) Normitetaan iät 26 vuotta ja 36 vuotta.

$$z_{26} = \frac{26-28}{3} = -0{,}666... \approx -0{,}67 \text{ ja}$$

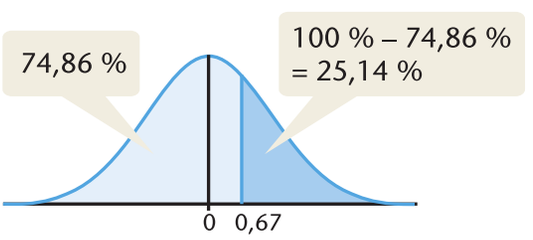
$$z_{36} = \frac{36-28}{3} = 2{,}666... \approx 2{,}67$$

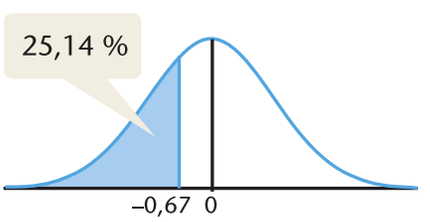
Taulukosta luetaan vastaavat kertymäfunktion arvot.

$$\Phi(2{,}67) = 0{,}9962 = 99{,}62\,\%$$

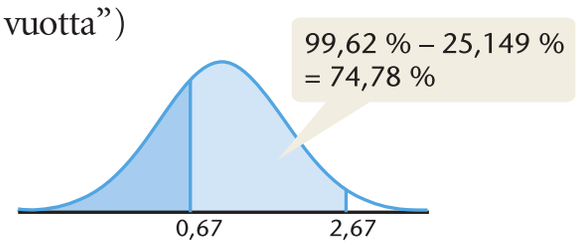


$$\begin{aligned}\Phi(-0{,}67) &= 1-\Phi(0{,}67)\\ &= 1-0{,}7486\\ &= 0{,}2514\\ &= 25{,}14\,\%\end{aligned}$$





$$\begin{aligned}&P(\text{"ikä välillä } 26-36 \text{ vuotta"})\\ &= 99{,}62\,\% - 25{,}14\,\%\\ &= 74{,}78\,\%\\ &\approx 0{,}75\end{aligned}$$



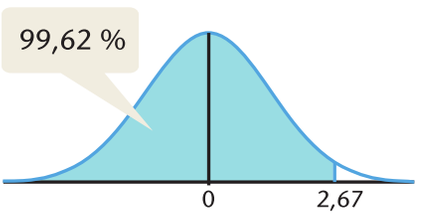
b) Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

$A =$ ”ainakin yksi henkilö on yli 36 vuotta ja katseluaika yli 5 tuntia”

$\overline{A} =$ ”ei yhtään yli 36-vuotiasta, jonka päivittäinen katseluaika on yli 5 tuntia”
$=$ ”kaikki 100 katsojaa alle 36-vuotiaita tai heidän katseluaikansa on alle 5 tuntia”

Iän 36 vuotta normitettu arvo oli $z_{36} \approx 2{,}67$.

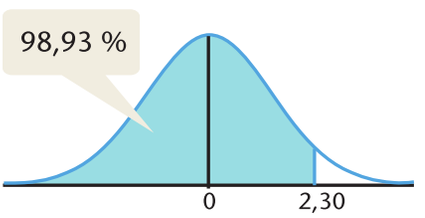
$P(\text{”ikä alle 36 vuotta”}) = \Phi(2{,}67) = 0{,}9962$



Normitetaan katseluaika 5 tuntia.

$$z_5 = \frac{5 - 3{,}5}{0{,}65} = 2{,}307... \approx 2{,}30$$

$P(\text{”aika alle 5 tuntia”}) = \Phi(2{,}30) = 0{,}9893$



Vastatapahtuman todennäköisyys on

$$P(\overline{A}) = 0{,}9962^{100} + 0{,}9893^{100} - 0{,}9962^{100} \cdot 0{,}9893^{100} = 0{,}7913...$$

Tällöin kysytty todennäköisyys on

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}7913... = 0{,}2086...$$

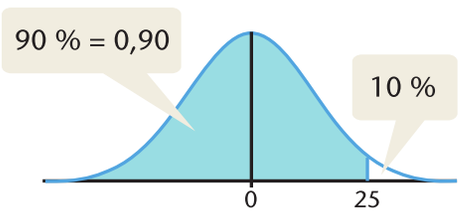
VASTAUS a) Todennäköisyys on 0,75. b) Todennäköisyys on 0,21.

ESIMERKKI 4

Televisiossa pyöri iltapäiväisin visailu, johon rekisteröidyttiin matkapuhelimella. Kysymykset olivat monivalintatehtäviä, joiden vastaukset lähetettiin tekstiviestillä. Eräänä päivänä osallistujien saamat pistemäärät noudattivat normaalijakaumaa keskihajonnan ollessa 7 pistettä. Visailijoista 10 % sai yli 25 pistettä. Mikä oli keskimääräinen pistesaalis?

RATKAISU

Koska 10 % visailijoista sai yli 25 pistettä, niin 90 % sai alle tämän pistemäärän.



Määritetään pistemäärän 25 normitettu arvo. Katsotaan kertymäfunktion arvojen taulukosta, mikä normitettu arvo z vastaa kertymäfunktion arvoa 0,90.

$$\Phi(z) = 0{,}90$$
$$\Phi(1{,}2816) = 0{,}90$$

Pistemäärän 25 normitettu arvo on siis $z_{25} = 1{,}2816$.

$$z_{25} = \frac{25 - \mu}{7} = 1{,}2816$$

$$\frac{25 - \mu}{7} = 1{,}2816 \quad \big| \cdot 7$$
$$25 - \mu = 8{,}9712$$
$$-\mu = -16{,}0288 \quad \big| \cdot (-1)$$
$$\mu = 16{,}0288 \approx 16$$

VASTAUS

Keskimääräinen pistesaalis oli 16 pistettä.

Tehtäviä

E 1

258. Arviolta joka viides maapallon asukkaista puhuu äidinkielenään kiinaa. Oletetaan, että kaikki maapallon ihmiset olisivat tietokannassa, josta tietokone voisi arpoa kahdeksan ihmisen joukon. Millä todennäköisyydellä kolme heistä puhuisi äidinkielenään kiinaa?

E 2

259. Werneri päätti valita lomamatkansa kohteen erään matkatoimiston lomaesitteestä. Matkakohteista 5 %:iin järjestettiin kaupunkilomia. Werneri valitsee esitteen avulla satunnaisesti 10 kertaa matkakohteensa. Hän päättää lähteä kaupunkilomalle, jos kaupunkikohde esiintyy satunnaisissa valinnoissa vähintään kaksi kertaa. Millä todennäköisyydellä Werneri lähtee kaupunkilomalle?

E 3

260. Erään 16 500 ihmistä käsittävän ryhmän pituuden oletetaan noudattavan normaalijakaumaa $N(175\text{ cm}, 5\text{ cm})$. Ryhmän älykkyysosamäärä jakautui myös normaalisti $N(102, 12)$. Mikä on todennäköisyys, että ryhmästä löytyy ainakin yksi henkilö, jonka pituus on yli 190 cm ja älykkyysosamäärä yli 140? Ryhmän kengännumerot ovat nekin jakautuneet normaalisti $N(41{,}6;\ 0{,}6)$. Voidaanko samalla päättelyllä kuin yllä laskea todennäköisyys, että ryhmässä on ainakin yksi henkilö, jonka pituus on yli 190 cm ja kengännumero vähintään 45? Perustele. [S1997, 10]

E 4

261. Pääsiäismunien paino noudattaa normaalijakaumaa siten, että munan keskipaino on 60,0 g. Todennäköisyys sille, että satunnaisesti valittu muna painaa yli 65,0 g, on 5,0 %. Laske pääsiäismunien painon keskihajonta.

262. Torilla myydään arpoja, joissa voittaa todennäköisyydellä 0,18. Henkilö ostaa 5 arpaa. Laske todennäköisyys, että hän voittaa
a) yhdellä arvalla
b) kolmella arvalla
c) ainakin kahdella arvalla.

263. Erään liikkeen myymistä CD-levyistä on 99 % virheettömiä. Ostaja tarkastaa 21 levyn erän ja löytää kaksi virheellistä levyä. Mikä on tämän tapahtuman todennäköisyys? [K1990, 8a]

264. Biologit tutkivat erään merialueen kalakantaa. Tutkittavien kalojen pituus noudatti normaalijakaumaa, jonka keskipituus oli 27,0 cm ja keskihajonta 5,0 cm. Millä todennäköisyydellä tutkittavalta merialueelta satunnaisesti valittu kala oli korkeintaan 29,0 cm pitkä?

265. Pizzayrittäjä lupaa pizzan ilmaiseksi, jos pizza ei valmistu 50 minuutissa. Keskimääräinen valmistusaika on 20 minuuttia ja keskihajonta 18 minuuttia. Millä todennäköisyydellä asiakas saa pizzansa ilmaiseksi, kun valmistusaika noudattaa normaalijakaumaa?

266. Suomalaisten 30-vuotiaiden miesten keskipituus on 180,0 cm, ja pituuksien keskihajonta on 5,8 cm. Kuinka monta prosenttia 30-vuotiaista miehistä on yli kaksi metriä pitkiä, jos oletetaan, että pituus noudattaa normaalijakaumaa? [K2004, 14]

267. Koulussa tutkittiin opiskelijoiden vanhemmilta saadun viikkorahan määrää. Rahamäärä x oli likimain normaalisti jakautunut ja $x \sim N(38{,}8)$. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu opiskelija saa viikkorahaa 30–40 euroa viikossa?

268. Liikennetarkkailussa mitattujen autojen nopeudet noudattivat likimain normaalijakaumaa $N(104{,}7;\ 17{,}3)$. Jos mittauskohdassa nopeusrajoitus oli 120 km/h, niin millä todennäköisyydellä tieosuudella ajava auto joko alittaa tai ylittää sallitun nopeuden enintään 10 prosentilla?

269. Huippuälykkäiden ihmisten yhdistyksen jäseneksi voi päästä henkilö, jonka älykkyysosamäärä on suurempi kuin 98 prosentilla ihmisistä. Mikä älykkyysosamäärä pitää henkilöllä vähintään olla, että hän voisi päästä yhdistyksen jäseneksi? Oletetaan, että älykkyysosamäärä noudattaa normaalijakaumaa $N(100,\ 24)$. [K1997, 6b]

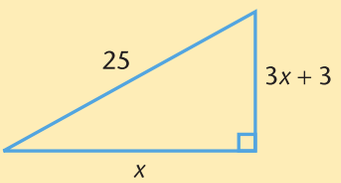
270. Ylioppilaskirjoituksissa Aija sai saman arvosanan sekä reaalikokeessa että matematiikassa eli hän menestyi suhteessa yhtä hyvin molemmissa kokeissa. Matematiikassa Aija sai 53 pistettä. Molempien kokeiden tulos noudattaa normaalijakaumaa siten, että matematiikassa $x \sim N(32, 4)$ ja reaalikokeessa $x \sim N(22, 3)$. Kuinka monta pistettä Aija sai reaalikokeesta?

Ylioppilaskokeet ja niiden ratkaisut

MATEMATIIKAN KOE LYHYT OPPIMÄÄRÄ KEVÄT 2005

1. Ratkaise a) yhtälö $3x + 2 = x - 4(5x - 1)$ b) yhtälö $\frac{x}{10} + \frac{x}{15} = x + 1$.

2. Muodosta yhtälö oheisen suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksien välille ja ratkaise tämän avulla kolmion kateettien pituudet.



3. Nuoripari pitää kirjaa talousmenoistaan. Joka kuukauden viimeisenä päivänä he laskevat, kuinka paljon kuukauden menot ovat olleet. Eräänä vuonna marraskuun lopussa menot olivat olleet keskimäärin 1651,20 euroa kuukaudessa. Joulukuussa menot olivat 1814,88 euroa. Mikä oli talousmenojen kuukausikeskiarvo koko vuoden osalta?

4. Potilas, joka painaa 75 kg, saa lääkettä tiputuksena verisuoneen. Annostus riippuu henkilön painosta siten, että annostusnopeuden on oltava 10 mikrogrammaa minuutissa henkilön jokaista painokiloa kohti. Lääke annetaan laimennettuna tiputusliuoksena; 1 ml kyseistä liuosta sisältää 500 mikrogrammaa lääkeainetta.
a) Kuinka monta millilitraa tiputusliuosta minuutissa potilaalle tällöin annetaan?
b) Kuinka kauan kestää 465 ml:n liuoksen tiputus?

5. Henkilö ostaa 10 000 eurolla itse metsään merkitsemänsä tontin, jota hän luulee neliönmuotoiseksi ja yhden hehtaarin suuruiseksi. Kaupanteon jälkeen selviää, että tontti on neljäkäs, jonka sivun pituus on 98,5 m ja yksi kulma 81°. Määritä tontin pinta-ala hehtaareina sekä tontin neliömetrihinta euroina.

6. Kesämökin kalliolle porataan kaivoa. Pyöreän porausreiän halkaisija on 140 mm ja syvyys 57,2 m. Reiästä porattu kiviaines levitetään tasapaksuna kerroksena suoraviivaisesti kulkeville mökkipoluille, joiden leveys on 45 cm ja yhteispituus 72,5 m. Kuinka paksu kerros syntyy? Oletetaan, että kiviaineksen tilavuus on sama kuin porausreiän tilavuus.

7. Määritä ne kohdat, joissa funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 17$ derivaatta saa arvon 2.

8. Henkilön palkasta jäi ennakonpidätyksen jälkeen käteen 73 %. Vuodenvaihteessa henkilö sai 45 euron palkankorotuksen. Samanaikaisesti ennakonpidätys laski 0,8 prosenttiyksikköä. Henkilölle jäi ennakonpidätyksen jälkeen käteen nyt 49,60 euroa enemmän kuin ennen muutoksia. Mikä oli henkilön uusi ennakonpidätysprosentti, ja mikä oli hänen uusi palkkansa?

9. Tasaisella vaakasuoralla puutarhapalstalla peruskallio on lähellä maanpintaa. Puutarhuri etsi kokeilemalla rautakangen avulla kohtaa, jossa peruskallio on lähinnä maanpintaa. Hän mittasi peruskallion syvyyden kolmessa pisteessä, jotka erääsä *xy*-koordinaatistossa (yksikkönä cm) olivat $A = (132, 247)$, $B = (357, 519)$ ja $C = (471, 125)$. Peruskallio oli syvimmillään pisteessä *A*. Siten kallio näytti nousevan maanpintaa kohti, kun pisteestä *A* siirryttiin kohti pisteitä *B* ja *C*. Puutarhuri päätti siirtyä pisteestä *A* ensin janan *BC* keskipisteeseen ja siitä vielä samaan suuntaan yhtä pitkän matkan pisteeseen *D*, jossa hän mittasi kallion syvyyden.
a) Piirrä kuvio. b) Laske janan *BC* keskipisteen koordinaatit.
c) Laske pisteen *D* koordinaatit.

10. Pelaaja lyö euron vetoa, että rahanheiton tulos on kruuna, mutta häviää. Hän uudistaa vetonsa kaksinkertaistamalla panoksensa ja häviää jälleen. Näin jatkuu edelleen. Hävittyään hän uudistaa aina vetonsa kaksinkertaistamalla panoksensa.
a) Mikä on todennäköisyys sille, että pelaaja häviää 20 kertaa peräkkäin?
b) Muodosta lauseke sille rahamäärälle, jonka hän on menettänyt *n* peräkkäisen häviön jälkeen, ja laske sen avulla, kuinka paljon pelaaja jää voitolle, jos hän 20 häviön jälkeen voittaa 21. kerralla. Voitto on panoksen suuruinen.

11. Määritä se paraabelin $y = x^2 + 2x - 1$ piste (x, y), jossa koordinaattien summa on mahdollisimman pieni.

12. Lämpömittaria tutkittiin tarkkuusmittarin avulla. Kun lämpömittari näytti –9,9 °C, oikea lämpötila oli –9,2 °C. Kun lämpömittari näytti 18,5 °C, oikea lämpötila oli 18,1 °C. Oletetaan, että oikean lämpötilan ja lämpömittarin lukeman välinen riippuvuus on lineaarinen.
a) Johda lauseke, jolla oikea lämpötila *y* voidaan laskea, kun lämpömittarin lukema *x* tunnetaan. Ilmoita esiintyvät kertoimet neljän desimaalin tarkkuudella.
b) Missä lämpötilassa lämpömittari näyttää aivan oikein?

13. Maanjäristyksessä vapautuvan seismisen energian *E* ja Richterin asteikon lukeman *M* välillä on yhteys $\log_{10} E = 11{,}8 + 1{,}5M$. Rakennus on mitoitettu kestämään järistys, jossa vapautuva seisminen energia on 50 % suurempi kuin seisminen energia järistyksessä, jonka voimakkuus Richterin asteikolla on 6,8. Kuinka voimakkaan järistyksen rakennus kestää Richterin asteikolla mitattuna?

14. Postimyyntiyritys tarjoaa mainoslehtisessään nopeaa ja vaivatonta kulutuslainaa. Lainaehtojen mukaan laina maksetaan takaisin yhtä suurin erin kunkin kuukauden lopussa, kuukausikorko on 1,9 % jäljellä olevasta velkasaldosta ja lisäksi kuukausittain peritään lisämaksua, joka on 0,4 % myönnetyn luoton määrästä.
a) Määritä kuukausierän suuruus ja lainan kokonaiskustannukset, jos lainasumma on 1200 euroa ja laina-aika yksi vuosi.
b) Osoita, että lainan todellinen vuosikorko on noin 31 %, toisin sanoen yhtä suureen kuukausierään päädytään, jos kuukausittain lyhennettävän tasaerälainan korko on 31 % vuodessa. Anna vastaukset euron tarkkuudella.

15. Kilon sokeripusseja täytetään koneellisesti. Pussituskone voidaan asettaa täyttämään pusseja, joiden paino noudattaa normaalijakaumaa keskiarvona koneelle asetettu paino ja keskihajontana 8,0 g. Kuinka suureksi sokeripussin paino tulee asettaa koneeseen, jotta 95 % sokeripusseista olisi painoltaan vähintään 1000 g?

1. a) $3x+2=x-4(5x-1)$ 1p

$3x+2=x-20x+4$

$3x-x+20x=4-2$ 1p

$22x=2 \quad |:22$

$x=\frac{2}{22}=\frac{1}{11}$ 1p

b) $\overset{3)}{\frac{x}{10}}+\overset{2)}{\frac{x}{15}}=\overset{30)}{x}+\overset{30)}{1}$

$\frac{3x}{30}+\frac{2x}{30}=\frac{30x}{30}+\frac{30}{30} \quad |\cdot 30$ 1p

$3x+2x=30x+30$

$5x-30x=30$

$-25x=30 \quad |:(-25)$ 1p

$x=-\frac{30}{25}\overset{(5}{=}-\frac{6}{5}$ 1p

Vastaus: a) $x=\frac{1}{11}$ b) $x=-\frac{6}{5}$

2. $x^2+(3x+3)^2=25^2$ 2p

$x^2+(3x+3)(3x+3)=625$

$x^2+9x^2+9x+9x+9=625$

$10x^2+18x+9=625$ 2p

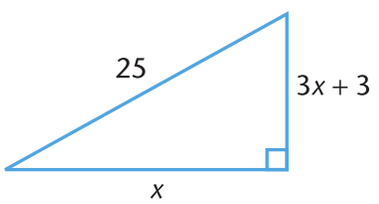
$10x^2+18x-616=0$

$x=\frac{-18\pm\sqrt{18^2-4\cdot 10\cdot(-616)}}{2\cdot 10}$

$=\frac{-18\pm 158}{20}$

$x=\frac{-18-158}{20}=-8,8$ tai

$x=\frac{-18+158}{20}=\frac{140}{20}=7$



Koska x on kolmion kateetin pituus, vain positiivinen arvo kelpaa eli $x=7$. 1p

Toisen kateetin pituus on tällöin $3x+3=3\cdot 7+3=24$. 1p

Vastaus: Kateetin pituudet ovat 7 ja 24.

3. Marraskuun loppuun mennessä menot olivat olleet keskimäärin 1651,20 €. Näin ollen kokonaismenot marraskuun loppuun mennessä olivat $11\cdot 1651,20=18163,20$ (€).

Joulukuun menot olivat 1814,88 €, joten koko vuoden menot olivat $18163,20+1814,88=19978,08$ (€). 2p

Keskimääräiset kuukausimenot olivat siis $\frac{19978,08\text{€}}{12}=1664,84\text{€}$. 2p 2p

Vastaus: 1664,84 €

4. Potilaan annostus minuutissa on 10 µg/ kg.
Lääkeaineen annostus minuutissa on $75\cdot 10\mu g=750\mu g$.

a) 1 ml sisältää 500 µg lääkeainetta. Potilaan annostus minuutissa on 750 µg eli millilitroina

$\frac{750\ \mu g}{500\ \mu g}=1,5$ (ml). 2p

b) Koska annostusnopeus on $1,5\frac{ml}{min}$, niin 465 ml:n tiputus kestää

$\frac{465\,ml}{1,5\frac{ml}{min}}=310\,min$. 2p

Muunnetaan 310 min tunneiksi.

$\frac{310\,min}{60\,min}=5,1666...$ (h)

Muunnetaan 0,1666… h minuuteiksi
0,1666… · 60 min = 10 min.

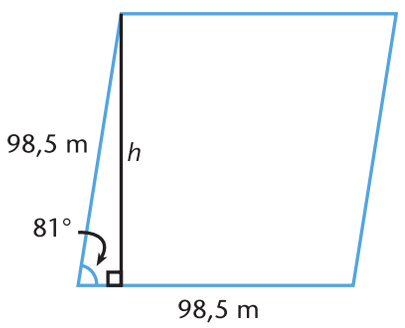
Siis 310 min = 5 h 10 min. (2p)

Vastaus: a) 1,5 ml b) 5 h 10 min

5. Neljäkäs on suunnikas, jonka sivut ovat yhtä pitkät.

Sivun pituus on 98,5 m ja yksi kulma 81°.
Pinta-alan laskemiseksi määritetään ensin neljäkkään korkeus h.
Muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\sin 81° = \frac{h}{98{,}5} \quad | \cdot 98{,}5$$
$$h = 98{,}5 \cdot \sin 81°$$
$$= 97{,}2873\ldots \text{ (m)} \quad (1p)$$



Neljäkään pinta-ala on

$$A = 98{,}5\,\text{m} \cdot h \quad (1p)$$
$$= 98{,}5\,\text{m} \cdot 97{,}2873\ldots\,\text{m}$$
$$= 9582{,}799\ldots\,\text{m}^2$$
$$= 0{,}9582799\ldots\,\text{ha}$$
$$\approx 0{,}96\,\text{ha}. \quad (2p)$$

Tontin neliöhinta on

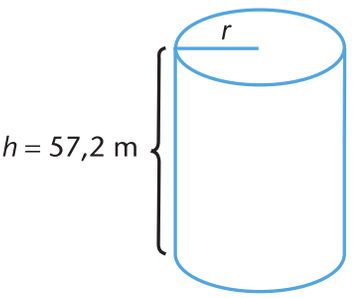
$$\frac{10000\,€}{9582{,}799\ldots\,\text{m}^2} = 1{,}0435\ldots \frac{€}{\text{m}^2} \approx 1{,}04 \frac{€}{\text{m}^2}.$$

(2p)

Vastaus: Pinta-ala 0,96 ha,
neliöhinta $1{,}04 \frac{€}{\text{m}^2}$

6. Porausreikä on suora ympyrälieriö, jonka halkaisija $d = 140$ mm ja korkeus $h = 57{,}2$ m.
Kiviaineksen tilavuus on yhtä suuri kuin lieriön tilavuus $V = \pi r^2 \cdot h$.
Määritetään aluksi reiän säde r.
Koska $d = 2r$, niin

$$r = \frac{d}{2} = \frac{140\,\text{mm}}{2} = 70\,\text{mm} = 0{,}07\,\text{m}.$$



Kiviaineksen tilavuus on siis (2p)
$V = \pi \cdot 0{,}07^2\,\text{m}^2 \cdot 57{,}2\,\text{m} = 0{,}88052\ldots\,\text{m}^3$.

Kiviaines levitetään mökkipoluille, joiden leveys on 45 cm = 0,45 m ja yhteispituus 72,5 m.

Polulle levitetyn kiviaineksen korkeus olkoon h.
Muodostuneen suorakulmaisen särmiön tilavuus on

$$V = A_{\text{pohja}} \cdot h$$
$$= 0{,}45\,\text{m} \cdot 72{,}5\,\text{m} \cdot h \quad (2p)$$
$$= 32{,}625\,\text{m}^2 \cdot h$$

Tilavuuden tulee olla yhtä suuri kuin lieriön (porausreiän) tilavuuden.

$$32{,}625\,\text{m}^2 \cdot h = 0{,}88052\ldots\,\text{m}^3 \quad | : 32{,}625\,\text{m}^2$$
$$h = \frac{0{,}88052\ldots\,\text{m}^3}{32{,}625\,\text{m}^2} = 0{,}02698\ldots\,\text{m} \approx 2{,}7\,\text{cm} \quad (2p)$$

Vastaus: Kerroksen paksuus on 2,7 cm.

7. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 17$

Derivaatta on $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$. (2p)

Derivaatan arvo on 2, kun

$$f'(x) = 2$$
$$3x^2 - 4x + 3 = 2 \quad \text{(1p)}$$
$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$
$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$
$$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6}$$
$$x = \frac{4+2}{6} = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{tai}$$
$$x = \frac{4-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{(3p)}$$

Vastaus: Kohdat ovat $x = 1$ ja $x = \frac{1}{3}$.

8. Merkitään palkkaa alussa kirjaimella x.

Palkka ennen (€)	Pidätysprosentti alussa	Käteen jäi alussa (€)
x	100 % – 73 % = 27 %	$0{,}73x$

Palkka lopuksi (€)	Pidätysprosentti lopuksi	Käteen jäi lopuksi (€)
$x + 45$	27 % – 0,8 % = 26,2 %	$0{,}738(x + 45)$

(2p)

Henkilölle jäi lopussa 49,60 € enemmän käteen kuin alussa (ennen pidätysprosentin laskua).
Tästä saadaan siis yhtälö

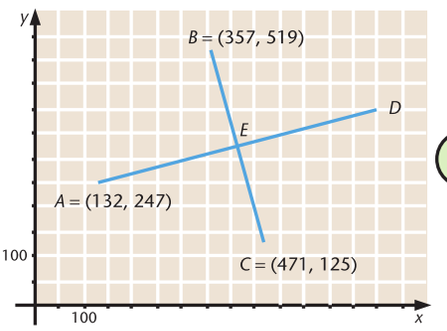
$$0{,}738(x+45) - 0{,}73x = 49{,}60 \quad \text{(2p)}$$
$$0{,}738x + 33{,}21 - 0{,}73x = 49{,}60$$
$$0{,}008x = 16{,}39 \quad | : 0{,}008$$
$$x = \frac{16{,}39}{0{,}008} = 2048{,}75 \ (€) \quad \text{(1p)}$$

Uusi palkka eli palkka lopuksi oli
$x + 45 = 2048{,}75 + 45 = 2093{,}75$ (€). (1p)

Vastaus: Uusi pidätysprosentti oli 26,2 %, uusi palkka oli 2093,75 €.

9. a) Merkitään koordinaatistoon pisteet A, B ja C.

Janan BC keskipistettä merkitään pisteellä E.
Kun tästä pisteestä jatketaan janan AE suuntaisesti yhtä pitkä matka, saavutaan pisteeseen D.



(2p)

b) Piste E on janan BC keskipiste.
Pisteen E koordinaatit ovat siis

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{375 + 471}{2} = 414$$
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{519 + 125}{2} = 322$$

eli piste $E = (414, 322)$. (2p)

c) Piste $E = (414, 322)$ on myös janan AD keskipiste. Merkitään pistettä $D = (x, y)$. Piste $A = (132, 247)$.
Keskipisteen eli pisteen E koordinaatit saadaan päätepisteiden A ja D avulla.

$$\frac{132 + x}{2} = 414 \quad \text{ja} \quad \frac{247 + y}{2} = 322$$
$$132 + x = 2 \cdot 414 \qquad 247 + y = 2 \cdot 322$$
$$x = 696 \qquad y = 397$$

Piste $D = (696, 397)$. (2p)

Vastaus: a) Keskipiste on (414, 322).
b) $D = (696, 397)$

10. Pelaaja häviää, kun tulee klaava.
$P(\text{"tulee klaava"}) = 0{,}5$

a) Rahaa heitetään 20 kertaa.

$P(\text{"häviää 20 kertaa"})$
$= P(\text{"20 kertaa klaava"})$
$= 0{,}5^{20} = 9{,}536... \cdot 10^{-7}$
$\approx 9{,}5 \cdot 10^{-7} = 0{,}00000095$ (2p)

b) Tarkastellaan pelaajan häviämän rahamäärän muodostumista eri kierroksilla.

Pelikierros	Hävitty rahamäärä (€)
1	1
2	$2 \cdot 1 = 2$
3	$2 \cdot 2 = 4 = 2^2$
4	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$
n	2^{n-1}

Tappio on siis yhteensä
$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-1}$ (€).
Kyseinen summa on geometrinen, jossa $a_1 = 1$, $q = 2$ ja jäseniä on n kpl.

Sarjan summa on (2p)

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1(1-2^n)}{1-2} = \frac{1-2^n}{-1} = -1+2^n.$$

20. pelikierroksen ($n = 20$) jälkeen panos on ollut yhteensä
$-1 + 2^n = -1 + 2^{20}$ (€).
Tämä rahamäärä on tullut tappiota.
21. pelikierroksella ($n = 21$) panos on
$2^{n-1} = 2^{21-1} = 2^{20}$ (€).
Pelaaja voittaa 21. kierroksella ja saa voittoa panoksen verran eli 2^{20} (€).
Edellisillä kierroksilla tappiota on tullut yhteensä $-1 + 2^{20}$ (€), joten voitolle jäädään (2p)
$2^{20} - (-1 + 2^{20}) = 2^{20} + 1 - 2^{20} = 1$ (€).

Vastaus: a) 0,00000095
b) Lauseke tappiolle yhteensä on $2^n - 1$ (€), voittoa 1 €.

11. Paraabelin x-koordinaatti on x ja y-koordinaatti on $y = x^2 + 2x - 1$.
Paraabelin kaikki pisteet (x, y) voidaan ilmoittaa muodossa $(x, x^2 + 2x - 1)$.

Koordinaattien summa on
$x + y = x + x^2 + 2x - 1 = x^2 + 3x - 1$.
Merkitään summan lauseketta
$s(x) = x^2 + 3x - 1$. (2p)

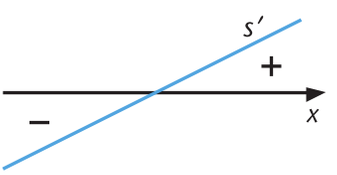
Mahdollisimman pieni summan arvo etsitään derivoimalla lauseketta.

$s'(x) = 2x + 3$ (1p)
$s'(x) = 0$
$2x + 3 = 0$
$2x = -3 \quad | : 2$
$x = -\frac{3}{2}$ (1p)

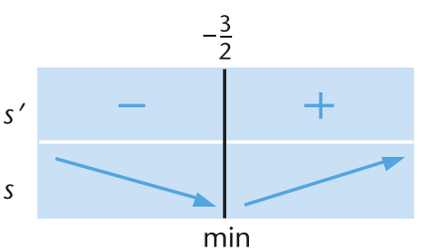
Piirretään funktion s kuvaaja derivaatan merkkikaavion avulla.

Tapa 1 Testipisteiden avulla
Valitaan testipisteiksi $x = -2$ ja $x = 0$.
$s'(-2) = 2 \cdot (-2) + 3 = -1$
$s'(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$

Tapa 2 Kuvaajan avulla



Laaditaan funktion kulkukaavio merkkikaavion perusteella.



(1p)

Funktion s pienin arvo saadaan siis kohdassa $x = -\frac{3}{2}$.

Vastaava y-koordinaatti tässä kohdassa on

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2x - 1 \\ &= \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 1 \\ &= \frac{9}{4} - 3 - 1 \\ &= -\frac{7}{4} \end{aligned}$$ 1p

Vastaus: Piste on $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}\right)$.

12. Merkitään x = lämpömittarin lukema (°C) ja y = todellinen (oikea) lämpötila (°C). Saadaan siis pisteet (–9,9; –9,2) ja (18,5; 18,1).

a) Lämpötilojen välistä riippuvuutta kuvaa suora, joka kulkee pisteiden kautta.
Suoran kulmakerroin

$$\begin{aligned} k &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{18{,}1 - (-9{,}2)}{18{,}5 - (-9{,}9)} \\ &= \frac{27{,}3}{28{,}4} \\ &= 0{,}961267... \\ &\approx 0{,}9613 \end{aligned}$$ 1p

Suoran yhtälöksi saadaan

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k(x - x_0) \\ y - 18{,}1 &= 0{,}961267...(x - 18{,}5) \\ y - 18{,}1 &= 0{,}961267...x - 17{,}783450... \\ y &= 0{,}961267...x + 0{,}3165492... \\ y &\approx 0{,}9613x + 0{,}3165 \end{aligned}$$ 3p

b) Mittari näyttää oikein, kun mittarin lukema x on yhtä suuri kuin oikea lämpötila y eli

$$\begin{aligned} x &= y \\ x &= 0{,}9613x + 0{,}3165 \quad \text{1p} \\ 0{,}0387x &= 0{,}3165 \quad \big| : 0{,}0387 \\ x &= \frac{0{,}3165}{0{,}0387} = 8{,}1782... \approx 8{,}2 \ (°\text{C}) \end{aligned}$$ 1p

Vastaus: a) $y \approx 0{,}9613x + 0{,}3165$
b) lämpötilassa 8,2 °C

13. Järistyksessä vapautuva energia on E. Voimakkuus Richterin asteikolla on M. Näiden välillä on yhteys
$\log_{10} E = 11{,}8 + 1{,}5M$ eli
$\lg E = 11{,}8 + 1{,}5M$.

Kun järistyksen voimakkuus on 6,8 Richterin asteikolla, vapautuva energia E saadaan yhtälöstä

$$\begin{aligned} \lg E &= 11{,}8 + 1{,}5M \quad \text{1p} \\ \lg E &= 11{,}8 + 1{,}5 \cdot 6{,}8 \\ \lg E &= 11{,}8 + 10{,}2 \\ \lg E &= 22 \\ E &= 10^{22} \quad \text{1p} \end{aligned}$$

Kun lg$a$ = x, niin a = 10^x.

Rakennus kestää vapautuvan energian, jonka määrä on 50 % suurempi eli 1,5-kertainen.
Energian määrä on siis $1{,}5 \cdot 10^{22}$.
Määritetään tätä vastaava Richterin asteikon lukema M.

$$\begin{aligned} \lg E &= 11{,}8 + 1{,}5M \quad \text{1p} \\ \lg\left(1{,}5 \cdot 10^{22}\right) &= 11{,}8 + 1{,}5M \\ 1{,}5M &= \lg\left(1{,}5 \cdot 10^{22}\right) - 11{,}8 \quad \text{2p} \\ 1{,}5M &= 10{,}37609... \quad \big| : 1{,}5 \\ M &= 6{,}9173... \approx 6{,}9 \quad \text{1p} \end{aligned}$$

Vastaus: Järistyksen voimakkuus on 6,9.

14. Lainan takaisinmaksu on kuukausittain, kuukausikorko 1,9 %. Lisäksi peritään kuukausittain lisämaksua, joka on 0,4 % myönnetyn luoton määrästä.

a) Luoton määrä 1200 €, laina-aika 1 vuosi. Maksuerien määrä on siis 12.

Lisämaksun määrä kuukausittain on $0{,}004 \cdot 200\ € = 4{,}80\ €$.
Varsinaista lainaa maksetaan takaisin yhtä suurin erin kuukausittain eli kyseessä on tasaerälaina. Merkitään tasaerän suuruutta kirjaimella A.
Korkotekijä $q = 1{,}019$.

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n}$$
$$= 1200 \cdot 1{,}019^{12} \cdot \frac{1-1{,}019}{1-1{,}019^{12}}$$
$$= 112{,}775...$$
$$\approx 112{,}78\ (€)$$ (2p)

Kuukausierä on (1p)
$112{,}78\ € + 4{,}80\ € = 117{,}58\ € \approx 118\ €$.

Lainan kokonaiskustannukset ovat (1p)
$12 \cdot 117{,}58\ € = 1410{,}96\ € \approx 1411\ €$.

b) Jos vuosikorko on 31 %, niin (1p)
kuukausikorko on $\frac{31\,\%}{12} = 2{,}5833...\,\%$.

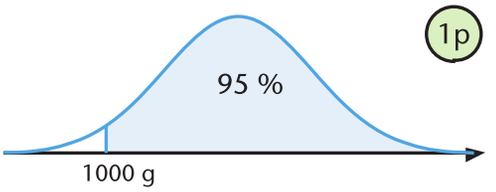
Nyt korkotekijä $q = 1{,}025833\ldots$, joten

$$A = 1200 \cdot 1{,}0258...^{12} \cdot \frac{1-1{,}0258...}{1-1{,}0258...^{16}}$$
$$= 117{,}575...$$
$$\approx 118\ (€)$$ (1p)

Näin päästään yhtä suureen kuukausierään kuin a-kohdassa.

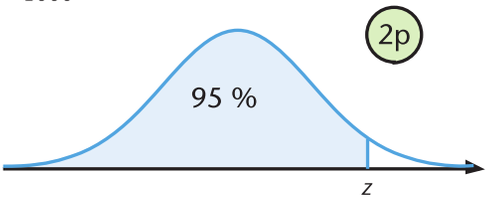
Vastaus: a) kuukausierä 118 €, kokonaiskustannukset 1411 €

15. Pussien paino noudattaa normaalijakaumaa, keskihajonta on $\sigma = 8{,}0\,\text{g}$.
Pusseista 95 % painaa vähintään 1000 g. (1p)



Merkitään painoa 1000 g vastaavaa normitettua arvoa z_{1000}.
Kertymäfunktiotaulukosta voidaan lukea kertymä tiettyyn arvoon mennessä.

Jakauman symmetrisyydestä johtuen määritetään ensin, mihin arvoon z mennessä on kertynyt 95 % jakaumasta.
Kertymäfunktiotaulukosta saadaan $\Phi(1{,}6449) = 0{,}95 = 95\,\%$.
Siis $z = 1{,}6449$, joten symmetriasta johtuen $z_{1000} = -1{,}6449$.



Tämän avulla voidaan laskea keskimääräinen pussien paino
eli koneelle asetettu arvo.

$$\frac{1000-\mu}{\sigma} = -1{,}6449$$ (2p)
$$\frac{100-\mu}{8{,}0} = -1{,}6449 \;\big|\cdot 8{,}0$$
$$1000-\mu = -13{,}12$$
$$-\mu = -1013{,}12 \;\big|\cdot(-1)$$
$$\mu = 1013{,}12 \approx 1013\ (\text{g})$$ (1p)

Vastaus: Koneelle asetettava arvo on 1013 g.

MATEMATIIKAN KOE LYHYT OPPIMÄÄRÄ SYKSY 2005

1. a) Ratkaise yhtälö $(3x-2)(3x+5)=0$.

b) Mikä on lausekkeen $\dfrac{a^2-c^2}{b-c}$ arvo, kun $a=1$, $b=-2$ ja $c=-\dfrac{1}{2}$?

2. Oletetaan, että pölyhiukkasen halkaisija on viisi tuhannesosamillimetriä. Kuinka monta hiukkasta mahtuu yhteen kuutiometriin, jos jokainen pölyhiukkanen vie kuutionmuotoisen tilan, jonka särmänpituus on hiukkasen halkaisija?

3. Boolin valmistukseen käytettiin 0,4 litraa marjamehua, puoli litraa vodkaa ja 1,5 litraa soodavettä. Vodkan alkoholipitoisuus on 38 tilavuusprosenttia. Paljonko boolissa oli alkoholia a) litroina b) tilavuusprosentteina?

4. Suorakulmion piiri on 17,0 metriä ja ala 17,5 neliömetriä. Määritä suorakulmion sivujen pituudet.

5. Olkoon $f(x)=2x^3-3x+1$. Laske $f'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Millä x:n arvoilla on $f'(x)=0$?

6. Kokouksen alussa osanottajat kättelivät toisensa kertaalleen. Kädenpuristuksia tuli tällöin kaikkiaan 66. Kuinka monta osanottajaa kokouksessa oli?

7. Kuinka suuri on sen ympyrän säde, jonka kehällä olevaa 5,1 metrin pituista kaarta vastaa 9 asteen keskuskulma?

8. Nikon autosta on bensiini loppunut, ja hän on lähtenyt kävelemään tietä pitkin noutaakseen bensiiniä lähimmältä huoltoasemalta. Kun hän on kävellyt 46 minuuttia, hänen ohitseen ajaa polkupyörällä Jasmine, joka kertoo käyvänsä huoltoasemalla ja lupaa samalla tuoda Nikolle kanisterissa bensiiniä. Niko kääntyy kävelemään takaisin autolle. Kun hän on kävellyt 38 minuuttia, Jasmine tuo hänelle bensiinikanisterin. Bensiinin osto huoltoasemalla oli kestänyt 7 minuuttia. Kuinka kaukana huoltoasema oli Nikon pysähtyneestä autosta, kun Niko kävelee 5 km tunnissa ja Jasmine pyöräilee 15 km tunnissa? Anna vastaus 100 metrin tarkkuudella.

9. Vuonna 2002 oli maksukorttimaksujen arvo Suomessa noussut noin 2,5-kertaiseksi siitä, mitä se oli vuonna 1993. Kuinka monta prosenttia korttimaksujen arvo on noussut vuosittain, jos oletetaan kasvun eri vuosina olleen prosentuaalisesti yhtä suurta? Kuinka suuri oli korttimaksujen arvo vuosina 2002 ja 1993 euroina ilmaistuna, kun se vuonna 1995 oli 10,1 miljardia euroa?

10. Kolikkoa heitetään a) neljä kertaa b) kaksikymmentä kertaa. Mikä on todennäköisyys, että saadaan yhtä monta kruunaa ja klaavaa? Vastaukset kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

11. Tasaisella maalla sijaitseva pistemäinen valonheitin valaisee 12 metrin etäisyydellä olevaa seinämää. Henkilö, jonka pituus on 175 cm, etenee valonheittimeltä seinämää kohti nopeudella 95 m/min. Kuinka pitkä on henkilön varjo seinämällä, kun hän on 4,0 metrin etäisyydellä valonheittimestä? Kuinka paljon varjo lyhenee hänen jatkettuaan kulkuaan kohden seinää edelleen kahden sekunnin ajan?

12. Määritä paraabelin $y = x^2 - x$ ja suoran $y = x + 2$ leikkauspisteet ja näiden välinen etäisyys.

13. Luonnollisille luvuille 2 ja 3 pätee $2^2 = 1 + 3$ ja $3^2 = 1 + 3 + 5$. Esitä vastaava yhtälö luvulle 4. Yleistä tämä koskemaan minkä tahansa luonnollisen luvun n neliötä n^2 ja osoita esittämäsi kaava oikeaksi.

14. Eräässä lyhyen matematiikan ylioppilaskokeessa keskiarvo oli 27,36 ja keskihajonta 12,23 pistettä. Jos oletetaan pistemäärän noudattavan normaalijakaumaa, niin

a) mikä on alin pistemäärä, jolla saa laudaturin, jos laudatur-arvosanojen osuudeksi halutaan enintään 5 % kaikista kokelaista

b) kuinka monta prosenttia kokelaista hyväksytään, jos alin hyväksytty pistemäärä on 12?

15. Henkilö avasi 2.5.2002 säästötilin ja talletti tilille 11 000 €. Tilin korko oli pankin primekorko vähennettynä yhdellä prosenttiyksiköllä. Primekorkoa tarkistettiin seuraavasti (tarkistuspäivä ja silloin voimaan tullut korko):

2.5.2002	3,50	2.1.2003	3,20
11.6.2002	3,75	3.3.2003	2,90
15.10.2002	3,50	24.6.2003	2,50

Korko laskettiin todellisten kalenteripäivien mukaan, ja vuoteen laskettiin 365 korkopäivää. Tarkistuspäiviltä korko laskettiin uuden koron mukaan. Korot, joista oli peritty 29 % lähdeveroa, liitettiin pääomaan vuoden lopussa ja tiliä lopetettaessa. Henkilö lopetti tilin 2.5.2003. Paljonko hän sai varat nostaessaan? Mikä oli talletuksen tuottoprosentti?

Ratkaisut syksy 2005

1. a) $(3x-2)(3x+5)=0$

$9x^2+15x-6x-10=0$ (1p)

$9x^2+9x-10=0$

$$x=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\cdot 9\cdot(-10)}}{2\cdot 9}$$

$$=\frac{-9\pm\sqrt{441}}{18}=\frac{-9\pm 21}{18}$$

$$x=\frac{-9+21}{18}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3} \quad \text{tai}$$

$$x=\frac{-9-21}{18}=\frac{-30}{18}=-\frac{5}{3}$$ (2p)

b) $\dfrac{a^2-c^2}{b-c}$

Sijoitetaan $a=1$, $b=-2$ ja $c=-\frac{1}{2}$.

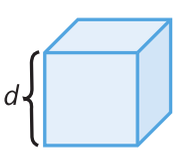
$$\frac{a^2-c^2}{b-c}=\frac{1^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{-2-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$ (1p)

$$=\frac{1-\frac{1}{4}}{-2+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{4}}{-\frac{3}{2}}$$ (1p)

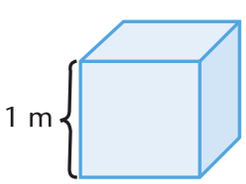
$$=\frac{\cancel{3}}{4}\cdot\left(-\frac{2}{\cancel{3}}\right)=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$ (1p)

Vastaus: a) $x=\frac{2}{3}$ tai $x=-\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$

2. Halkaisija $d=\frac{5}{1000}\text{ mm}=0{,}005\text{ mm}$.



Yhden hiukkasen viemä tila on siis kuution tilavuus eli
$d^3=0{,}005^3\text{ mm}^3=1{,}25\cdot 10^{-7}\text{ mm}^3$. (2p)



Kuution, jonka sivun pituus on 1 m, tilavuus on (2p)

$1\text{ m}\cdot 1\text{ m}\cdot 1\text{ m}=1\text{ m}^3=10^9\text{ mm}^3$.

Tähän tilavuuteen mahtuu pölyhiukkasia

$$\frac{10^9\text{ mm}^3}{1{,}25\cdot 10^{-7}\text{ mm}^3}=8\cdot 10^{15}$$ kappaletta. (2p)

Vastaus: $8\cdot 10^{15}$ kappaletta

3. Boolin tilavuus oli
$0{,}4\text{ l}+0{,}5\text{ l}+1{,}5\text{ l}=2{,}4\text{ l}$. (1p)

Vodkan alkoholipitoisuus on 38 tilavuusprosenttia.

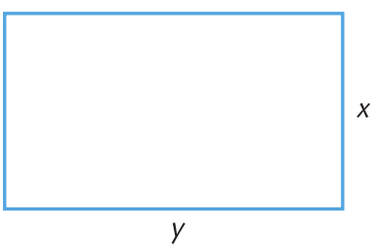
a) Alkoholin määrä litroina on (2p)
$0{,}38\cdot 0{,}5\text{ l}=0{,}19\text{ l}$.

b) Alkoholin määrä tilavuusprosentteina koko boolissa oli

$$\frac{0{,}19\text{ l}}{2{,}4\text{ l}}=0{,}07916...\approx 7{,}9\,\%.$$ (2p) (1p)

Vastaus: a) 0,19 l b) 7,9 %

4. Merkitään suorakulmion sivuja kirjaimilla x (m) ja y (m).



Piiri on 17,0 m eli $2x+2y=17{,}0$.

Pinta-ala on 17,5 m^2 eli $xy=17{,}5$. (1p)

Yhtälöistä muodostetaan yhtälöpari.

$$\begin{cases}2x+2y=17{,}0\\ xy=17{,}5\end{cases}$$

Ylimmästä yhtälöstä ratkaistaan toinen tuntematon, esimerkiksi x.

$$2x=17{,}0-2y \quad |:2$$ (1p)

$$x=8{,}5-y$$

Sijoitetaan saatu lauseke yhtälöparin alimpaan yhtälöön ja ratkaistaan y.

$$(8{,}5-y)y=17{,}5$$
$$-y^2+8{,}5y-17{,}5=0 \quad \text{1p}$$
$$y=\frac{-8{,}5\pm\sqrt{8{,}5^2-4\cdot(-1)\cdot(-17{,}5)}}{2\cdot(-1)}$$
$$=\frac{-8{,}5\pm\sqrt{2{,}25}}{-2}=\frac{-8{,}5\pm1{,}5}{-2}$$
$$y=\frac{-8{,}5+1{,}5}{-2}=3{,}5 \quad \text{tai}$$
$$y=\frac{-8{,}5-1{,}5}{-2}=5 \quad \text{1p}$$

Kun $y=3{,}5$ (m), niin $x=8{,}5-3{,}5=5$ (m). 2p
Kun $y=5$ (m), niin $x=8{,}5-5=3{,}5$ (m).

Vastaus: Suorakulmion sivut ovat 5 m ja 3,5 m.

5. $f(x)=2x^3-3x+1$ 2p
$f'(x)=6x^2-3$

$$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-3=6\cdot\frac{\sqrt{3}^2}{2^2}-3$$
$$=6\cdot\frac{3}{4}-3=\frac{18}{4}-3=\frac{3}{2} \quad \text{2p}$$

$$f'(x)=0$$
$$6x^2-3=0$$
$$6x^2=3 \mid :6$$
$$x^2=\frac{1}{2}$$
$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{2p}$$

6. **Tapa 1:** Olkoon osanottajia n kpl.
Kahden henkilön muodostamia jonoja (järjestettyjä) voidaan muodostaa $n(n-1)$ kappaletta.
Koska osanottajat kättelevät toisiaan kertaalleen, itse kättelyjä on puolet järjestettyjen jonojen määrästä eli
$\frac{n(n-1)}{2}=66$ kappaletta. 2p

$$\frac{n(n-1)}{2}=66 \mid \cdot 2$$
$$n(n-1)=132$$
$$n^2-n-132=0 \quad \text{1p}$$
$$n=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-132)}}{2\cdot1}$$
$$=\frac{1\pm\sqrt{529}}{2}=\frac{1\pm23}{2}$$
$$n=\frac{1+23}{2}=\frac{24}{2}=12 \quad \text{tai}$$
$$n=\frac{1-23}{2}=\frac{-22}{2}=-11 \quad \text{2p}$$

Koska n on osallistujien lukumäärä, $n=-11<0$ ei kelpaa.
Osallistujia on $n=12$ kappaletta. 1p

Vastaus: 12 osallistujaa

Tapa 2: Olkoon osanottajia n kpl.
Tästä määrästä n voidaan muodostaa 2 alkion osajoukkoja eli kombinaatioita

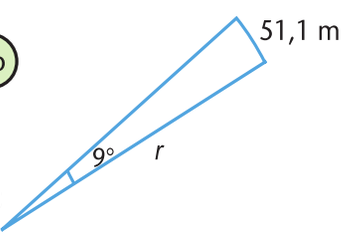
$$\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}=66 \text{ kappaletta.}$$

$$\frac{n!}{2!(n-2)!}=66$$
$$\frac{n\cdot(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot1}{(2\cdot1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot1}=66$$
$$\frac{n(n-1)}{2}=66$$

Yhtälön ratkaisu ja vastaus kuten edellä (Tapa 1).

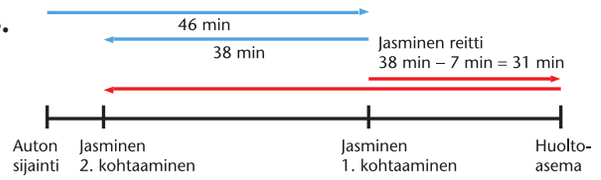
7. Kaaren pituus $b=5{,}1$ m, ja keskuskulma $\alpha=9°$.
Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella r.

$$\frac{\alpha}{360°}2\pi r=b$$
$$\frac{9°}{360°}2\pi r=5{,}1 \quad \text{2p}$$
$$\frac{1}{40}2\pi r=5{,}1 \mid \cdot 40$$
$$2\pi r=204 \mid :2\pi$$
$$r=\frac{204}{2\pi}=32{,}467\ldots\approx32\,(\text{m})$$



Vastaus: Säde on 32 m. 2p 2p

8.



$$v_{\text{Niko}} = \frac{5\,\text{km}}{1\,\text{h}} = 5\frac{\text{km}}{\text{h}},$$

$$v_{\text{Jasmine}} = \frac{15\,\text{km}}{1\,\text{h}} = 15\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

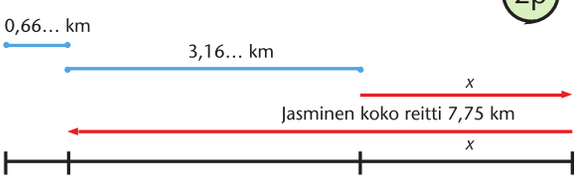
Nikon 38 minuutissa kävelemä matka s:

$$s = v \cdot t = 5\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{38}{60}\,\text{h} = \frac{19}{6}\,\text{km} \approx 3{,}16...\,\text{km}$$

Nikon 8 minuutissa (46 min – 38 min) kävelemä matka s:

$$s = v \cdot t = 5\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{8}{60}\,\text{h} = \frac{2}{3}\,\text{km} \approx 0{,}66...\,\text{km}$$

2p



Jasminen 31 minuutissa pyöräilemä matka s:

$$s = v \cdot t = 15\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{31}{60}\,\text{h} = \frac{31}{4}\,\text{km} = 7{,}75\,\text{km}$$

Merkitään Jasminen matkaa huoltoasemalle kirjaimella x. Nikon auton etäisyys huoltoasemalta on
0,66… km + 3,16… km + x (km).

Jasminen kokonaismatka on

$$2x + \frac{19}{6}\,\text{km} = \frac{31}{4}\,\text{km}$$

$$2x = \frac{55}{12}\,\text{km} \quad |:2$$

$$x = \frac{55}{24}\,\text{km}$$

2p

Nikon auton etäisyys huoltoasemalta on siis $\frac{2}{3} + \frac{19}{6} + \frac{55}{24} = \frac{49}{8} = 6{,}125 \approx 6{,}1$ (km).

2p

Vastaus: 6,1 km

9. Merkitään korttimaksujen arvoa vuonna 1993 kirjaimella A (> 0). Oletetaan, että maksut ovat kasvaneet vuosittain x-kertaisiksi eli kasvaneet prosentuaalisesti yhtä paljon.

Aika vuosina	Maksujen määrä euroina
Nyt (vuosi 1993)	A
1	xA
2	x^2A
3	x^3A
9 (vuosi 2002)	x^9A
n	x^nA

Maksujen arvo oli noussut 2,5-kertaiseksi vuoteen 2002 mennessä eli

$$x^9A = 2{,}5A \quad |: A$$

2p

$$x^9 = 2{,}5$$

$$x = \sqrt[9]{2{,}5} = 1{,}107...$$

1p

Vuosittaista nousua on siis ollut
$1{,}107 - 1 = 0{,}1071\ldots \approx 11\ \%$.

1p

Koska korttimaksut kasvavat vuosittain $\sqrt[9]{2{,}5} \approx 1{,}107$ -kertaisiksi, niin maksujen kehitystä voidaan kuvata eksponentiaalisella mallilla $x^nA = (1{,}107...)^nA$, jossa n on kuluneiden vuosien määrä.
Korttimaksut olivat 10,1 miljardia euroa vuonna 1995.
Vuonna 2002 on kulunut 7 vuotta vuodesta 1995 eli $n = 7$.
Maksujen määrä on
$(1{,}107...)^7 \cdot 10{,}1 = 20{,}598... \approx 20{,}6\,(\text{mrd euroa})$.

1p

Vuosi 1993 oli kaksi vuotta aiemmin eli $n = -2$.

1p

Maksujen määrä on
$(1{,}107...)^{-2} \cdot 10{,}1 = 8{,}239... \approx 8{,}2\,(\text{mrd euroa})$.

Vastaus: Vuotuinen kasvu 11 %, maksut olivat 8,2 mrd euroa vuonna 1993 ja 20,6 mrd euroa vuonna 2002

10. Todennäköisyydet saada kruuna tai klaava ovat yhtä suuret eli

$$P(\text{"kruuna"}) = P(\text{"klaava"}) = \frac{1}{2}.$$

a) Kolikkoa heitetään neljä kertaa eli kyseessä on toistokoe.

$$P(\text{"sama määrä kruunia ja klaavoja"})$$
$$= P(\text{"2 kruunaa ja 2 klaavaa"})$$
$$= \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}375$$

2p 1p

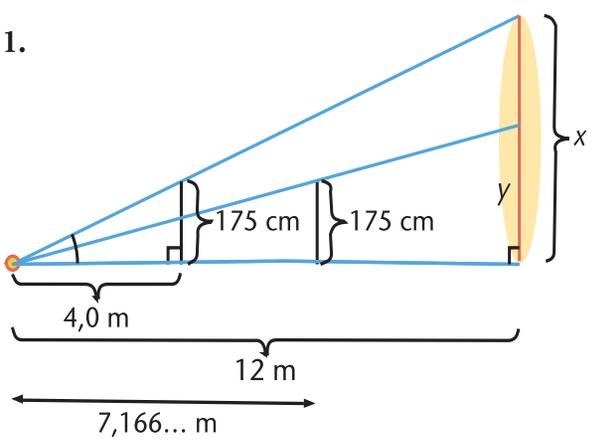
b) Kolikkoa heitetään kaksikymmentä kertaa.

$$P(\text{"sama määrä kruunia ja klaavoja"})$$
$$= P(\text{"10 kruunaa ja 10 klaavaa"})$$
$$= \binom{20}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0{,}1761\ldots \approx 0{,}176$$

2p 1p

Vastaus: a) Todennäköisyys on 0,375.
b) Todennäköisyys on 0,176.

11.



Tilanteesta muodostuu kaksi suorakulmaista kolmiota, jotka ovat yhdenmuotoisia (kk-lause).
Vastinsivujen verrannollisuudesta saadaan yhtälö

$$\frac{1{,}75}{x} = \frac{4\,\text{m}}{12\,\text{m}}$$ 2p

$$\frac{1{,}75}{x} = \frac{4}{12}$$
$$4x = 21 \quad |:4$$
$$x = 5{,}25 \approx 5{,}3\ (\text{m})$$ 1p

Kahden sekunnin aikana henkilö on edennyt matkan

$$s = v \cdot t = 95\frac{\text{m}}{\text{min}} \cdot \frac{2}{60}\text{min}$$
$$= \frac{19}{6}\text{m} = 3{,}166\ldots\text{m}.$$ 1p

Henkilön etäisyys valonheittimestä on siis $4\ \text{m} + 3{,}166\ldots\text{m} = 7{,}166\ldots\ \text{m}$.
Vastinsivujen verrannollisuudesta saadaan verranto

$$\frac{1{,}75}{y} = \frac{7{,}166\ldots\text{m}}{12\,\text{m}}$$
$$\frac{1{,}75}{x} = \frac{7{,}166\ldots}{12}$$
$$7{,}16\ldots x = 21 \quad |:7{,}166\ldots$$
$$x = 2{,}9302\ldots\ (\text{m})$$ 1p

Varjo on siis lyhentynyt 1p
$5{,}25\ \text{m} - 2{,}9302\ldots\ \text{m} = 2{,}3197\ldots\ \text{m} \approx 2{,}3\ \text{m}$.

Vastaus: Varjon pituus on aluksi 5,3 m.
Lopuksi varjo on 2,3 m lyhyempi.

12. Leikkauspisteessä y-koordinaatit ovat yhtä suuret.

$$\begin{cases} y = x^2 - x \\ y = x + 2 \end{cases}$$

$$x^2 - x = x + 2$$ 1p
$$x^2 - 2x - 2 = 0$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$
$$= \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2}$$
$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4}\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{2} \pm \frac{2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$ 1p

Lasketaan leikkauspisteiden y-koordinaatit.
Kun $x = 1 + \sqrt{3}$, niin
$y = x + 2 = 1 + \sqrt{3} + 2 = 3 + \sqrt{3}$.

Kun $x = 1-\sqrt{3}$, niin
$y = x+2 = 1-\sqrt{3}+2 = 3-\sqrt{3}$.

Leikkauspisteet ovat siis
$\left(1+\sqrt{3},3+\sqrt{3}\right)$ ja $\left(1-\sqrt{3},3-\sqrt{3}\right)$. 1p

Leikkauspisteiden etäisyys

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \\ &= \sqrt{\left(1+\sqrt{3}-1+\sqrt{3}\right)^2+\left(3+\sqrt{3}-3+\sqrt{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2} \quad \text{2p} \\ &= \sqrt{4\cdot 3+4\cdot 3} \\ &= \sqrt{24} = \sqrt{4\cdot 6} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{6} = 2\sqrt{6} \quad \text{1p} \end{aligned}$$

Vastaus: Leikkauspisteet ovat
$\left(1+\sqrt{3},3+\sqrt{3}\right)$ ja $\left(1-\sqrt{3},3-\sqrt{3}\right)$,
etäisyys $d = \sqrt{24}$.

13. $2^2 = 1+3,\ 3^2 = 1+3+5,\ 4^2 = 1+3+5+7$ 1p

Jos n on luonnollinen luku, niin
$n^2 = 1+3+5+\ldots+(2n-1)$, sillä summan viimeinen pariton luku on aina $2n-1$. 2p

Esimerkiksi

$3 = 2n-1 = 2\cdot 2-1$, kun $n = 2$
$5 = 2n-1 = 2\cdot 3-1$, kun $n = 3$
$7 = 2n-1 = 2\cdot 4-1$, kun $n = 4$

Väite: $n^2 = 1+3+5+\ldots+(2n-1)$
Todistus: Summa $1+3+5+\ldots+(2n-1)$ on aritmeettinen summa, jossa
$a_1 = 1, a_n = 2n-1$ ja $d = 2$. 1p
Aritmeettisen summan kaavalla saadaan

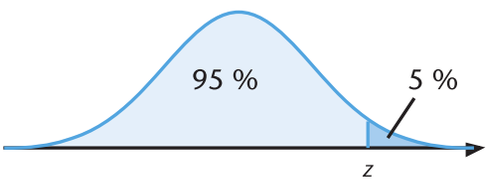
$$S = n\cdot\frac{a_1+a_n}{2} = n\frac{1+(2n-1)}{2} = \frac{n\cdot 2n}{2} = n^2. \quad \text{2p}$$

Näin ollen $n^2 = 1+3+5+\ldots+(2n-1)$. □

14. Kokeen pistemäärä noudatti normaalijakaumaa $N \sim (27,36;12,23)$.

a) Laudatur-arvosanojen osuus on enintään 5 % kaikista kokelaista.

Lasketaan, minkä pistemäärään alla on 95 % kokelaista.
Kertymäfunktiotaulukosta saadaan
$\Phi(z) = \Phi(1,6449) = 0,95 = 95\,\%$. 1p



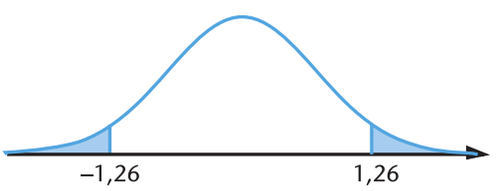
Lasketaan, minkä pistemäärän x normitettu arvo on $z = 1,6449$.

$$\frac{x-27,36}{12,23} = 1,6449 \quad |\cdot 12,23$$
$$x-27,36 = 20,117127 \quad \text{2p}$$
$$x = 47,477\ldots \text{ (pistettä)}$$

Laudatur-arvosanoja halutaan enintään 5 %, joten pisteitä vaaditaan vähintään 48. 1p

b) Normitetaan pistemäärä $x = 12$.

$$z_{12} = \frac{12-27,36}{12,23} = -1,25592\ldots \approx -1,26 \quad \text{1p}$$



Kun pistemäärä on alle 12, niin

$$\Phi(-1,26) = 1-\Phi(1,26)$$
$$= 100\,\%-89,62\,\% = 10,38\,\%.$$

10,38 % kokelaista hylätään eli hyväksyttyjä on 1p
100 % – 10,38 % = 89,62 % ≈ 90 %.

Vastaus: a) 48 pistettä b) 90 %

15. Tutkitaan pääoman kasvua taulukon avulla. 2.5.2002 tilille talletetaan 11 000 €.

VUOSI 2002:

Päivämäärä	Aika vuorokausina	Korko-prosentti	Korko euroina
2.5.–10.6.2002	39	3,50 – 1 = 2,50	$\frac{39}{365} \cdot 0{,}0250 \cdot 11\,000 \approx 29{,}38$
11.6.–14.10.2002	126	2,75	$\frac{126}{365} \cdot 0{,}0275 \cdot 11\,000 \approx 104{,}42$
15.10.–31.12.2002	78	2,50	$\frac{78}{365} \cdot 0{,}0250 \cdot 11\,000 \approx 58{,}77$

Korot ovat yhteensä
29,38 € + 104,42 € + 58,77 € = 192,57 €. (1p)

Lopullinen pääoma vuonna 2002 on
11 000 € + 0,71 · 192,57 € ≈ 11 136,72 €. (1p)

VUOSI 2002:

Päivämäärä	Aika vuorokausina	Korko-prosentti	Korko euroina
1.1.2003	1	2,50	$\frac{1}{365} \cdot 0{,}0250 \cdot 11136{,}72 \approx 0{,}76$
2.1.–2.3.2003	60	2,20	$\frac{60}{365} \cdot 0{,}0220 \cdot 11136{,}72 \approx 40{,}28$
3.3.–2.5.2003	61	1,90	$\frac{61}{365} \cdot 0{,}0190 \cdot 11136{,}72 \approx 35{,}36$

Korot ovat yhteensä
0,76 € + 40,28 € + 35,36 € = 76,40 €. (1p)

Lopullinen pääoma 2.5.2003 on
11 136,72 + 0,71 · 76,40 ≈ 11 190,96 €. (1p)

Kun tili lopetettiin, henkilön varat olivat siis 11 190,96 €.
Tilin tuotto oli 11 190,96 € – 11 000 € = 190,96 €.

Tuottoprosentti oli $\frac{190{,}96}{11000} = 0{,}01736 \approx 1{,}74\,\%$. (2p)

Vastaus: Pääoma lopussa 11 190,96 €, tuottoprosentti 1,74 %

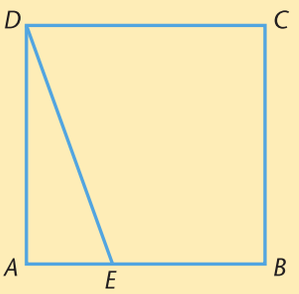
MATEMATIIKAN KOE LYHYT OPPIMÄÄRÄ KEVÄT 2006

1. Ratkaise yhtälöt a) $20x^2 - 49x + 9 = 0$ b) $\frac{x}{3} + \frac{4}{6} = \frac{x}{2}$.

2. Sievennä lausekkeet

a) $\frac{x^2}{3x} + \frac{2(1-x)}{6}$ b) $\frac{(x+2)(x-2)}{x^2-4}$ c) $\frac{x^{3+n}x^{4+n}}{x^7}$.

3. Neliön $ABCD$ sivulla AB on sellainen piste E, että $AE = 1$ ja $ED = 3$. Laske neliön
a) sivun pituus
b) pinta-ala
c) lävistäjän pituus.
Anna vastaukset tarkkoina arvoina.



4. Kappaleen paino on kääntäen verrannollinen maapallon keskipisteestä mitatun etäisyyden neliöön. Lentokone painaa maan pinnalla 56,0 tonnia. Kuinka paljon se painaa kymmenen kilometrin korkeudessa? Maan pinnan etäisyys keskipisteestä on 6370 kilometriä.

5. Suomen viennin jakauma vuonna 2003 sekä viennin määrässä vuonna 2004 tapahtuneet muutokset käyvät ilmi seuraavasta taulukosta. (Lähde: Kaupan Keskusliitto.)

Vienti toimialoittain	Jakauma vuonna 2003 (%)	Muutos vuodesta 2003 vuoteen 2004 (%)
Puu- ja paperiteollisuus	25,4	+13,6
Kemianteollisuus	8,7	+4,4
Kone- ja metalliteollisuus	25,1	–4,4
Sähkötekninen teollisuus	24,3	+1,9
Muut	16,5	+14,6

a) Lisääntyikö vai vähenikö kokonaisvienti vuonna 2004? Kuinka monta prosenttia muutos oli?
b) Esitä viennin prosentuaalinen jakauma vuonna 2004.

6. Autoilija ajoi 28 kilometriä pitkän tieosuuden nopeudella 80 km/h. Lopun matkasta hän ajoi moottoritietä pitkin. Millä keskinopeudella hän ajoi moottoritieosuuden, kun hän perille tultuaan totesi keskinopeuden koko 75 kilometrin ajomatkansa osalta olleen 100 km/h?

7. Tutki, milloin funktio $f(x) = x^3 - 27x + 2$ on kasvava ja milloin vähenevä.

8. Tehtaan on vähennettävä vesistöön joutuvia päästöjä yhteensä 20 prosenttia seuraavien neljän vuoden aikana.
a) Kuinka monta prosenttia on asetettava vuotuiseksi tavoitteeksi, kun halutaan, että suhteellinen vähennys on sama kaikkina vuosina?
b) Jos samaa vuotuista tavoitetta noudatetaan edelleen, kuinka monen vuoden kuluttua päästöt on saatu vähenemään alle puoleen alkuperäisestä määrästään?

9. Noppaa heitetään 5 kertaa. Millä todennäköisyydellä tuloksena on
a) täsmälleen kaksi kuutosta
b) vähintään kaksi kuutosta?

10. Suunnikkaan $ABCD$ kärkipisteet ovat $A = (1, -2)$, $B = (6, -1)$, $C = (7, 2)$ ja $D = (2, 1)$. Laske suunnikkaan pinta-ala sekä kulmien suuruudet asteen kymmenesosan tarkkuudella.

11. Aritmeettisen jonon ensimmäinen termi on $\frac{3}{2}$, toinen 7 ja viimeinen 117. Laske jonon summa.

12. Kaava $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ on yleensä väärä. Osoita, että jos kaava pätee, niin joko $x = 0$ tai $y = 0$ (tai molemmat). Myös kaava $(x - y)^2 = x^2 - y^2$ on yleensä väärä. Anna esimerkki luvuista x ja y, joille tämä kaava pätee, mutta edellinen kaava ei päde.

13. Pienien alumiinista valmistettavien suoran ympyräkartion muotoisten valaisinkupujen korkeuden ja pohjaympyrän halkaisijan summa on 18,6 cm. Määritä kartion pohjaympyrän säde siten, että kartion tilavuus on mahdollisimman suuri. Määritä tämä tilavuus.

14. Henkilö ottaa 120 000 euron asuntolainan. Laina sovitaan hoidettavaksi tasaeräeli annuiteettilainana puolivuosittain, ja vuotuiseksi koroksi sovitaan 3,70 %. Harkittavana on laina-ajan pituus. Laske lainan hoitomaksun eli annuiteetin suuruus, jos laina-aika on a) 22 vuotta b) 60 vuotta. Kuinka paljon lainaa jälkimmäisessä tapauksessa olisi vielä jäljellä silloin, kun laina ensimmäisessä tapauksessa olisi tullut maksetuksi loppuun? Lainasta ei aiheudu muita kuluja.

15. Ilpo ja Antero säätivät vuorotellen alumiiniprofiilin leikkurin terää 2000 mm:n kohdalle. Hyväksyttävä profiilin pituus on 2000 mm ± 0,40 mm. Säädetyn terän leikkauskohdan oletetaan noudattavan normaalijakaumaa keskiarvona 2000 mm. Ilpon säädön keskihajonta on 0,19 mm ja Anteron 0,24 mm. Kun jokaisella säädöllä leikataan yhtä monta profiilia, niin kuinka monta prosenttia enemmän hukkakappaleita leikkuri keskimäärin tuottaa Anteron säätämänä kuin Ilpon säätämänä?

Ratkaisut kevät 2006

1. a) $20x^2 - 49x + 9 = 0$

$$x = \frac{-(-49) \pm \sqrt{(-49)^2 - 4 \cdot 20 \cdot 9}}{2 \cdot 20}$$

$$= \frac{49 \pm \sqrt{1681}}{40} = \frac{49 \pm 41}{40}$$

$$x = \frac{49+41}{40} = \frac{9}{4} \quad \text{tai}$$

$$x = \frac{49-41}{40} = \frac{1}{5}$$

3p

b) $\frac{x}{3} + \frac{4}{6} = \frac{x}{2} \quad | \cdot 6$

$$\frac{6x}{3} + \frac{24}{6} = \frac{6x}{2}$$

$$2x + 4 = 3x$$

$$-x = -4 \quad | : (-1)$$

$$x = 4$$

3p

Vastaus: a) $x = \frac{9}{4}$ tai $x = \frac{1}{5}$ b) $x = 4$

2. a) $\frac{x^2}{3x} + \frac{2(1-x)}{6}$

$$= \frac{x^{2-1}}{3} + \frac{\cancel{2}(1-x)}{\cancel{6}_3}$$

$$= \frac{x}{3} + \frac{1-x}{3} = \frac{x+1-x}{3} = \frac{1}{3}$$

2p

b) $\frac{(x+2)(x-2)}{x^2-4} = \frac{\cancel{(x+2)}\,\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x+2)}\,\cancel{(x-2)}} = 1$

2p

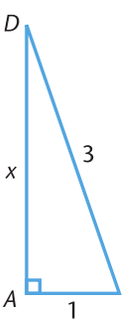
c) $\frac{x^{3+n}x^{4+n}}{x^7} = \frac{x^{3+n+4+n}}{x^7} = \frac{x^{7+2n}}{x^7}$

$$= x^{7+2n-7} = x^{2n}$$

2p

3. Koska monikulmio $ABCD$ on neliö, on kulma A suora.

a) Neliön sivut ovat yhtä pitkät. Sivun $AD = x$ pituus saadaan Pythagoraan lauseella.



$$x^2 + 1^2 = 3^2$$

$$x^2 + 1 = 9$$

$$x^2 = 8$$

$$x = \pm\sqrt{8}$$

Koska pituus on aina positiivinen, niin $x = AD = \sqrt{8}$ (pituusyksikköä). 2p

b) Neliön pinta-ala

$A = \text{kanta} \cdot \text{korkeus} = x^2 = \sqrt{8}^2$

$= 8$ (pinta-alayksikköä). 2p

c) Neliön lävistäjiä on kaksi: janat AC ja BD. Nämä ovat yhtä pitkiä. Neliön sivun pituus on $x = \sqrt{8}$. Merkitään lävistäjää kirjaimella a.

Pythagoraan lauseella saadaan

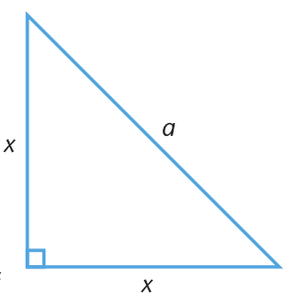
$$x^2 + x^2 = a^2$$

$$2x^2 = a^2$$

$$2 \cdot \sqrt{8}^2 = a^2$$

$$a^2 = 16$$

$$a = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$



Koska pituus on aina positiivinen, niin lävistäjä $a = 4$ (pituusyksikköä). 2p

Vastaus: a) sivun pituus $\sqrt{8}$ pituusyksikköä
b) pinta-ala 8 pinta-alayksikköä
c) lävistäjä 4 pituusyksikköä

4. Merkitään painoa 10 km korkeudessa kirjaimella x.

Paino (tonnia)	Etäisyyden neliö (km^2)
56,0	6370^2
x	$(6370 + 10)^2 = 6380^2$

Koska suureet ovat kääntäen verrannollisia, saadaan yhtälö

$$\frac{56,0}{x} = \frac{6380^2}{6370^2}$$

$$6380^2 x = 56,0 \cdot 6370^2 \quad | : 6380^2$$

3p

$$x = \frac{56,0 \cdot 6370^2}{6380^2} = 55,824... \approx 55,8 \text{ (tonnia)}$$

2p 1p

Vastaus: Paino on noin 55,8 tonnia.

5. Merkitään kokonaisvientiä vuonna 2003 kirjaimella x.

2003:

Puu ja paperi	$0{,}254x$
Kemia	$0{,}087x$
Kone ja metalli	$0{,}251x$
Sähkötekninen	$0{,}243x$
Muut	$0{,}165x$
Kokonaisvienti	x

2004: 2p

Puu ja paperi	+13,6 %	$1{,}136 \cdot 0{,}254x = 0{,}288544x$
Kemia	+4,4 %	$1{,}044 \cdot 0{,}087x = 0{,}090828x$
Kone ja metalli	–4,4 %	$0{,}956 \cdot 0{,}251x = 0{,}239956x$
Sähkötekninen	+1,9 %	$1{,}019 \cdot 0{,}243x = 0{,}247617x$
Muut	+14,6 %	$1{,}146 \cdot 0{,}165x = 0{,}18909\,x$
Kokonaisvienti		$1{,}056035x$ 1p

a) Kokonaisvienti vuonna 2004 oli siis $1{,}056035x$ eli kasvua oli $1{,}056035 - 1 = 0{,}05605 \approx 5{,}6\ \%$. 1p

b) Prosentuaalinen jakauma vuonna 2004: 2p

Puu ja paperi	$\frac{0{,}288544\,x}{1{,}056035\,x} = 0{,}2732\ldots \approx 27{,}3\,\%$
Kemia	$\frac{0{,}090828\,x}{1{,}056035\,x} = 0{,}0860\ldots \approx 8{,}6\,\%$
Kone ja metalli	$\frac{0{,}239956\,x}{1{,}056035\,x} = 0{,}2272\ldots \approx 22{,}7\,\%$
Sähkötekninen	$\frac{0{,}247617\,x}{1{,}056035\,x} = 0{,}2344\ldots \approx 23{,}4\,\%$
Muut	$\frac{0{,}18909\,x}{1{,}056035\,x} = 0{,}1790\ldots \approx 17{,}9\,\%$

6. Kokonaismatka oli 75 km, ja keskinopeus oli 100 km/h.
Alkumatka 28 km ajettiin nopeudella 80 km/h.
Loppumatka oli 75 km – 28 km = 47 km.

Lasketaan, kuinka paljon aikaa käytettiin loppumatkaan.

Keskinopeus 75 km matkalla oli 100 km/h, joten koko matkaan käytettiin aikaa

$$t = \frac{s}{v} = \frac{75\,\text{km}}{100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}75\,\text{h}.$$ 2p

Alkumatkaan (28 km) käytettiin aikaa

$$t = \frac{28\,\text{km}}{80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}35\,\text{h}.$$ 1p

Loppumatkaan kului siis aikaa
$0{,}75\ \text{h} - 0{,}35\ \text{h} = 0{,}40\ \text{h}$. 1p
Koska loppumatkaa oli 47 km, nopeus oli tällöin

$$v = \frac{s}{t} = \frac{47\,\text{km}}{0{,}40\,\text{h}} = 117{,}5 \approx 120\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right).$$ 2p

Vastaus: Nopeus oli 120 km/h.

7. Funktion monotonisuutta (kasvavuutta tai vähenevyyttä) tutkitaan derivaatan avulla.

$$f(x) = x^3 - 27x + 2$$
$$f'(x) = 3x^2 - 27$$ 1p

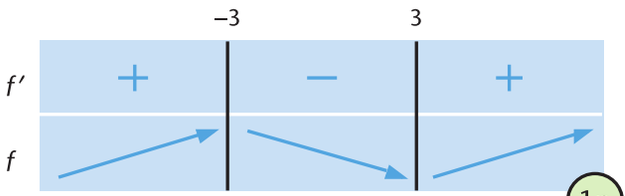
$$f'(x) = 0, \text{kun}$$
$$3x^2 - 27 = 0$$
$$3x^2 = 27 \,|:3$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm 3$$ 2p

Tutkitaan funktion kulkua kulkukaavion avulla. Kulkukaavio laaditaan derivaatan merkkikaavion perusteella.

Tapa 1 **Testipisteiden avulla**

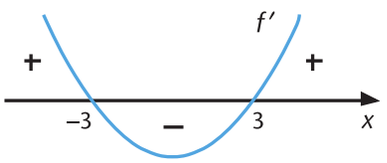
Valitaan testipisteiksi $x = -4$, $x = 0$ ja $x = 4$.

$$f'(-4) = 3\cdot(-4)^2 - 27 = 21 > 0$$
$$f'(0) = 3\cdot 0^2 - 27 = -27 < 0$$
$$f'(4) = 3\cdot 4^2 - 27 = 21 > 0$$



1p

Tapa 2 **Kuvaajan avulla**



Kulkukaavion perusteella funktio on kasvava väleillä $x \le -3$ tai $x \ge 3$ sekä vähenevä välillä $-3 \le x \le 3$. 2p

Vastaus: Funktio on vähenevä, kun $-3 \le x \le 3$, ja kasvava, kun $x \le -3$ tai $x \ge 3$.

8. Merkitään päästöjen määrää alussa kirjaimella A. Olkoon xA päästöjen määrä vuoden kuluttua. Määrä putoaa taulukon mukaisesti.

Aika vuosina	Päästöjen määrä
0	A
1	xA
2	x^2A
4	x^4A

a) Päästöt vähenevät neljän vuoden aikana 20 % eli

$$x^4A = 0{,}80A \quad |:A$$ 1p
$$x^4 = 0{,}80$$
$$x = \pm\sqrt[4]{0{,}80}$$
$$x = \pm 0{,}9457\ldots \approx \pm 0{,}95$$ 1p

Ratkaisuksi kelpaa vain positiivinen arvo, koska päästöt tulevat 0,95-kertaisiksi vuodessa.
Vuotuinen tavoite päästöjen vähentämiselle on siis
$1 - 0{,}9457\ldots = 0{,}0542\ldots \approx 5{,}4\ \%$. 1p

b) Kun alkutilanteesta on kulunut n vuotta, päästöt ovat $0{,}50A$. Saadaan siis yhtälö

$$(0{,}9457\ldots)^n A = 0{,}50A \quad |:A$$ 1p
$$(0{,}9457\ldots)^n = 0{,}50$$
$$\lg(0{,}9457\ldots)^n = \lg 0{,}50$$
$$n\lg 0{,}9457\ldots = \lg 0{,}50 \quad |:\lg 0{,}9457\ldots$$
$$n = \frac{\lg 0{,}50}{\lg 0{,}9457\ldots} = 12{,}42513\ldots$$ 1p

Kun $n = 12$, niin päästöjen määrä on $(0{,}9457\ldots)^{12}A = 0{,}512A > 0{,}50A$.
Kun $n = 13$, niin päästöjen määrä on $(0{,}9457\ldots)^{13}A = 0{,}4842\ldots A < 0{,}50A$.
Päästöt ovat siis alle $0{,}50A$ kolmentoista vuoden jälkeen. 1p

Vastaus: a) 5,4 % b) 13 vuoden jälkeen

9. Todennäköisyys saada kuutonen on $P(\text{"kuutonen"}) = \frac{1}{6}$. Näin ollen

$P(\text{"ei kuutonen"}) = \frac{5}{6}$.

a) Noppaa heitetään viisi kertaa, joten kyse on toistokokeesta. Viidestä heitosta täsmälleen kaksi on kuutosia todennäköisyydellä

$$\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{625}{3888}=0{,}1607...\approx 0{,}16.$$

1p 1p 1p

b) Tapahtuman ”vähintään kaksi kuutosta” vastatapahtuma on ”ei yhtään tai yksi kuutonen”.
Lasketaan vastatapahtuman todennäköisyys ensin.

P(”ei yhtään tai yksi kuutonen”)

$$=\binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5+\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$=\frac{3125}{3888}=0{,}80375...$$ 1p

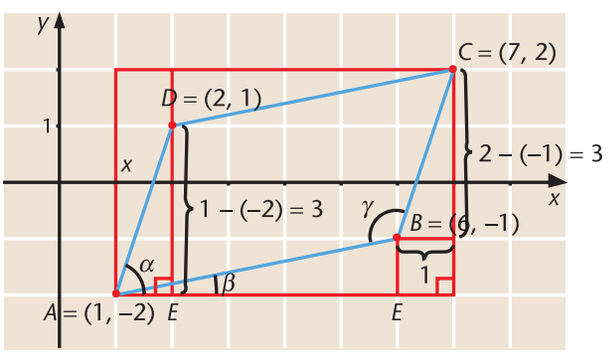
P(”ainakin kaksi kuutosta”)

$$=1-\frac{3125}{3888}=0{,}19624...\approx 0{,}20$$ 1p

1p

Vastaus: a) todennäköisyydellä 0,16
b) todennäköisyydellä 0,20

10.



Kulman A laskemiseksi määritetään suunnikkaan sivun x pituus.
Sivun x pituus on pisteiden A ja D välinen etäisyys.

$$x=\sqrt{(2-1)^2+\big(1-(-2)\big)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

1p

Suorakulmaisesta kolmiosta ADE saadaan

$$\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$$
$$\alpha=71{,}565...^\circ$$

Suorakulmaisesta kolmiosta AFB saadaan

$$\tan\beta=\frac{BF}{AF}=\frac{-1-(-2)}{6-1}=\frac{1}{5}$$
$$\beta=11{,}3099...^\circ$$

Suunnikkaan kulma A on siis

$$\alpha-\beta=71{,}565...^\circ-11{,}3099...^\circ$$
$$=60{,}2661...^\circ\approx 60{,}3^\circ.$$

Suunnikkaan kulmien summa on 360°, ja vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret. Saadaan siis yhtälö

$$2\cdot 60{,}2661...^\circ+2\gamma=360^\circ$$
$$2\gamma=360^\circ-120{,}5322...^\circ$$
$$2\gamma=239{,}4678...^\circ\ \big|:2$$ 2p
$$\lambda=119{,}7339...^\circ\approx 119{,}7^\circ$$

Suunnikkaan kulmat ovat
kulma A = kulma $C\approx 60{,}3^\circ$,
kulma B = kulma $D\approx 119{,}7^\circ$.

Pinta-ala saadaan geometrisesti kuviosta laskemalla. 1p

$$A_{\text{suorakulmio}}=(7-1)\cdot\big(2-(-2)\big)=6\cdot 4=24$$

Tästä vähennetään neljän suorakulmaisen kolmion ja kahden neliön alat.

$$A_{\text{kolmiot}}=2\cdot\left(\frac{5\cdot 1}{2}\right)+2\cdot\left(\frac{1\cdot 3}{2}\right)=2\cdot\frac{5}{2}+2\cdot\frac{3}{2}=8$$

$$A_{\text{neliöt}}=2\cdot(1\cdot 1)=2$$

Suunnikkaan $ABCD$ ala on siis 2p
$A_{\text{suunnikas}}=24-8-2=14$.

Vastaus: Pinta-ala 14 pinta-alayksikköä, kulmat A ja C 60,3°, kulmat B ja D 119,7°

11. Aritmeettisen jonon yleinen jäsen on $a_n = a_1 + (n-1)d$, jossa d on peräkkäisten termien erotus ja a_1 ensimmäinen jäsen.

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad d = a_2 - a_1 = 7 - \frac{3}{2} = \frac{11}{2} \qquad \text{1p}$$

Lasketaan, kuinka monta jäsentä n jonossa on.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ 117 &= \frac{3}{2} + (n-1)\cdot\frac{11}{2} \quad \big| \cdot 2 \qquad \text{1p} \\ 234 &= 3 + (n-1)\cdot 11 \\ 234 &= 3 + 11n - 11 \\ 242 &= 11n \quad \big| : 11 \\ n &= 22 \qquad \text{2p} \end{aligned}$$

Aritmeettisen jonon summa on

$$S_{22} = 22 \cdot \frac{a_1 + a_{22}}{2} = 22 \cdot \frac{\frac{3}{2} + 117}{2}$$
$$= \frac{2607}{2} = 1303\frac{1}{2}. \qquad \text{2p}$$

Vastaus: Summa on $1303\frac{1}{2}$.

12. $(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + 2xy + y^2$ 1p

Ratkaistaan yhtälö $(x+y)^2 = x^2 + y^2$.

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 &= x^2 + y^2 \qquad \text{1p} \\ 2xy &= 0 \quad \big| : 2 \\ xy &= 0 \\ x = 0 &\text{ tai } y = 0 \qquad \text{1p} \end{aligned}$$

Kaava $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ pätee, kun $x = 0$ tai $y = 0$ (tai molemmat).

Tutkitaan, milloin
kaava A: $(x+y)^2 = x^2 - y^2$ pätee ja
kaava B: $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ ei päde.

Esimerkiksi kun $x = y = 1$, niin 1p

Kaava A

vasen puoli: $(x+y)^2 = (1-1)^2 = 0$

oikea puoli: $x^2 - y^2 = 1^2 - 1^2 = 0$

Siis kaava $(x-y)^2 = x^2 - y^2$ pätee, kun $x = y = 1$. 1p

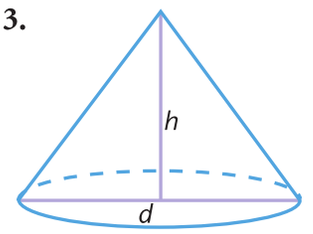
Kaava B

vasen puoli: $(x+y)^2 = (1+1)^2 = 2^2 = 4$

oikea puoli: $x^2 + y^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

Siis kaava $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ ei päde, kun $x = y = 1$. 1p

13.



$h + d = 18{,}6$ cm
halkaisija $d = 2r$

Muodostetaan ympyräkartion tilavuuden lauseke annettujen lähtötietojen avulla.

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{pohja}} \cdot h \qquad \text{1p}$$

Muodostetaan tilavuuden lauseke niin, että se riippuu säteestä r.
Muodostetaan ensin korkeuden h lauseke säteen r avulla.

$$\begin{aligned} h + d &= 18{,}6 \\ h + 2r &= 18{,}6 \\ h &= 18{,}6 - 2r \end{aligned}$$

1) Korkeus $h > 0$ eli

$$\begin{aligned} 18{,}6 - 2r &> 0 \\ -2r &> -18{,}6 \quad \big| : (-2) \\ r &< 9{,}3 \end{aligned}$$

2) Pohjaympyrän säde $r > 0$.

Pohjaympyrän säde r voi siis vaihdella välillä $]0;\, 9{,}3[$.

Tilavuudeksi saadaan

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{1}{3}\pi r^2 (18{,}6 - 2r) \\ &= 6{,}2\pi r^2 - \frac{2}{3}\pi r^3 \qquad \text{1p} \end{aligned}$$

Koska kysytään tilavuuden suurinta arvoa, muodostetaan derivaatta ja lasketaan ääriarvot.

$V'(r) = 12{,}4\pi r - 2\pi r^2$ 1p

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} V'(r) &= 0 \\ 12{,}4\pi r - 2\pi r^2 &= 0 \\ 2\pi r(6{,}2 - r) &= 0 \\ 2\pi r = 0 \quad &\text{tai} \quad 6{,}2 - r = 0 \\ r = 0 \quad &\qquad\quad r = 6{,}2 \end{aligned}$$ 1p

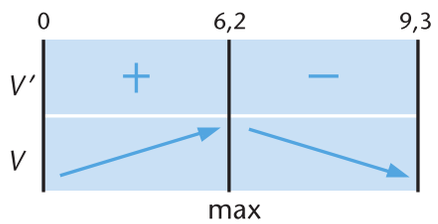
Laaditaan funktion V kulkukaavio derivaatan merkkikaavion avulla.

Tapa 1 Testipisteiden avulla

Valitaan testipisteiksi $r = 1$ ja $r = 7$.

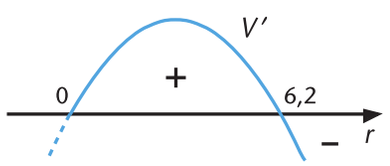
$V'(1) = 12{,}4\pi \cdot 1 - 2\pi \cdot 1^2 = 32{,}6... > 0$

$V'(7) = 12{,}4\pi \cdot 7 - 2\pi \cdot 7^2 = -43{,}9... < 0$



1p

Tapa 2 Kuvaajan avulla



Tilavuus saa suurimman arvonsa, kun $r = 6{,}2$ (cm).

Tilavuuden arvo on tällöin

$$\begin{aligned} V(6{,}2) &= 6{,}2\pi \cdot 6{,}2^2 - \frac{2}{3}\pi \cdot 6{,}2^3 \\ &= 249{,}576... \approx 250 \text{ (cm}^3\text{)}. \end{aligned}$$ 1p

Vastaus: Pohjaympyrän säde $r = 6{,}2$ cm ja tilavuus 250 cm^3.

14. Vuotuinen korko on 3,70 %, puolivuotinen korko on $\frac{1}{2} \cdot 3{,}70\,\% = 1{,}85\,\%$.

a) Laina-aika on 22 vuotta, joten lyhennyskertojen määrä on 44.
Merkitään annuiteetin määrää kirjaimella A. 1p
Korkotekijä $q = 1{,}1085$.

$$\begin{aligned} A &= 120000 \cdot 1{,}0185^{44} \frac{1 - 1{,}0185}{1 - 1{,}0185^{44}} \\ &= 4010{,}043... \\ &\approx 4010{,}04 \text{ (€)} \end{aligned}$$ 2p

b) Laina-aika on 60 vuotta, joten lyhennyskertojen määrä on 120.

$$\begin{aligned} A &= 120000 \cdot 1{,}0185^{120} \cdot \frac{1 - 1{,}0185}{1 - 1{,}0185^{120}} \\ &= 2496{,}723... \\ &\approx 2496{,}72 \text{ (€)} \end{aligned}$$ 1p

Lainan jäljellä 44 lyhennyksen jälkeen

$V_k = Kq^k - A \cdot \frac{1 - q^k}{1 - q}$ 1p

$= 120000 \cdot 1{,}0185^{44} - 2496{,}72 \cdot \frac{1 - 1{,}0185^{44}}{1 - 1{,}0185}$

$= 101449{,}391...$

$\approx 101449{,}40$ (€) 1p

Vastaus: a) Annuiteetti on 4010,04 €.
b) Annuiteetti on 2496,72 €, lainaa jäljellä 101 449,40 €.

15. Leikkauskohta Ilpon säädöllä
$x \sim N(2000;\ 0{,}19)$,
leikkauskohta Anteron säädöllä
$x \sim N(2000;\ 0{,}24)$.
Hyväksyttävän profiilin pituus on
2000 mm ± 0,40 mm eli
$1999{,}60\,\text{mm} \le x \le 2000{,}40\,\text{mm}$.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia hukkakappaleita Ilpon säädöllä tuotetaan. Normitetaan arvot $x_1 = 1999{,}60$ mm ja $x_2 = 2000{,}40$ mm.

$$z_1 = \frac{1999{,}60 - 2000}{0{,}19} = -2{,}105... \approx -2{,}11$$

ja

$$z_2 = \frac{2000{,}40 - 2000}{0{,}19} = 2{,}105... \approx 2{,}11$$ 1p

$$\begin{aligned} &P(-2{,}11 \le z \le 2{,}11) \\ &= \Phi(2{,}11) - \Phi(-2{,}11) \\ &= 98{,}26\,\% - (100\,\% - 98{,}26\,\%) \\ &= 98{,}26\,\% - 100\,\% + 98{,}26\,\% \\ &= 96{,}52\,\% \end{aligned}$$ 1p 1p

Ilpolla on siis hukkakappaleita 100 % – 96,52 % = 3,48 %.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia hukkakappaleita Anteron säädöllä saadaan. Normitetaan arvot $x_1 = 1999{,}60$ mm ja $x_2 = 2000{,}40$ mm.

$$z_1 = \frac{1999{,}60 - 2000}{0{,}24} = -1{,}666... \approx -1{,}67$$

ja

$$z_2 = \frac{2000{,}40 - 2000}{0{,}24} = 1{,}666... \approx 1{,}67$$

$$\begin{aligned} &P(-1{,}67 \le z \le 1{,}67) \\ &= \Phi(1{,}67) - \Phi(-1{,}67) \\ &= 95{,}25\,\% - (100\,\% - 95{,}25\,\%) \\ &= 95{,}25\,\% - 100\,\% + 95{,}25\,\% \\ &= 90{,}5\,\% \end{aligned}$$ 1p

Anterolla on siis hukkakappaleita 100 % – 90,5 % = 9,5 %. 1p

Anteron hukkapaloja verrataan Ilpon vastaaviin, eli suhde on

$$\frac{9{,}5\,\%}{3{,}48\,\%} = 2{,}7298...$$

Anterolla on 2,7298… – 1 = 1,7298… = 172,98… % ≈ 173 % enemmän hukkapaloja. 1p

Vastaus: 173 %

Tehtävien vastaukset

1.1 Työvälineitä – Ensimmäisen ja toisen asteen yhtälö

1. a) $x = -2$ b) $x = 0$

2. a) $x = -\frac{1}{7}$ b) $x = -6\frac{1}{2}$

3. a) $x = -2$
   b) $x = \frac{9}{24}$

4. a) $x = -5$ tai $x = 3$
   b) $x = \pm 8$

5. a) $x = -6$ tai $x = 2$
   b) $x = 4$ tai $x = 5$

6. a) ei ratkaisua
   b) $x = 5$

7. a) $x = 0$ tai $x = -\frac{8}{7}$
   b) $x = -1$ tai $x = 2\frac{1}{2}$

8. a) ratkaisuna kaikki x:n arvot
   b) Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

9. a) $x = -3$, $x = 0$ tai $x = 1$
   b) $x = -2$, $x = 0$ tai $x = 5$

10. a) $x = -1$
    b) $x = -\frac{1}{22}$

11. a) $x = \frac{1}{9}$
    b) $x = \frac{1}{3}$ tai $x = \frac{1}{4}$

12. $x = \frac{1}{5}$ tai $x = -\frac{1}{2}$

13. $x = \frac{1}{3}$, toteuttaa

14. a) $x = \frac{1}{5}$ tai $x = -\frac{1}{3}$
    b) $x = \frac{13}{9}$

15. $7\frac{1}{9}$

16. 1° $x = -6$ 2° $x = -\frac{13}{11}$

17. $a = -12$

18. $x = \frac{1}{2}$ tai $x = \frac{3}{2}$

19. $x = -\frac{5}{3}$ on molempien yhtälöiden ratkaisu.

20. $x = -0{,}0005$ tai $x = 0{,}0015$

2.1 Kulmia ja pituuksia

21. Salamanisku tapahtui korkeudella 5000 m, etäisyys katsojasta 10 800 m.

22. a) 1780 km b) 7100 km

23. 34 300 km

24. 62,8 km

25. Kone nousi 3,8° kulmassa, lento kesti 34 s.

26. 1,9°

27. 1670 m

28. 16 m

29. 4,0 h (4 h 4 min)

30. 0,6 %

31. 104°

32. 26 km

33. korkeus 6,6 cm, kantakulmat 66°, huippukulma 48°

34. 29 s/kierros

35. a) 47° b) 69°

36. suorien pituus 86,90 m, 8. rata 53,66 m eli 13,4 % sisärataa pidempi

37. 3,2 km

38. tunnelin syvin kohta 53 km, tunneliin ajetaan 7,4° kulmassa

39. a) 25°, 55° ja 100°
    b) $\frac{9}{2}, 6, \frac{15}{2}$

40. sivusärmän pituus 29, kulma 46,40°

41. –

2.2 Pinta-aloja ja tilavuuksia

42. a) 8,0 kg/dm^3
    b) 9,8 cm

43. a) 487 cm^3 b) 3,8 cm

44. 80 cm^2

45. 64 m^2

46. 870 cm^2

47. 15 m^2

48. 7,7 cm

49. a) 16 min b) 90 kg

50. 89 %

51. 79 cm^2

52. 4,20 cm ja 9,20 cm

53. a) 21 cm b) 78°
c) 94 l d) 80 kg

54. a) 380 cm^3
b) 380 cm^2

55. kulmat 27,7° ja 117,3°, ala 2689 m^2

56. ympäri piirretyn neliön ala 15,28 cm^2, sisään piirretyn neliön ala 7,64 cm^2

57. 700 kg

58. $\frac{2}{3}$

59. 20 100 vuotta

60. 6,2 mm

2.3 Prosentti, suhde ja verrannollisuus

61. Myyntipalkkio nousi.

62. a) 5,0 % b) 5,2 %

63. a) 1,2 km b) 2,5 cm
c) 1:50 000

64. mittakaava 1:1 500 000, ala 140 km^2

65. 3,9 m

66. 3,2 miljoonaa euroa

67. 18 %, ei riipu myyntihinnasta

68. a) väheni 1 %
b) kasvoi 0,8 %

69. 8,3 cm

70. 20 cm^2 ja 105 cm^2

71. 14 litraa

72. luonnossa 360 m, kartalla 0,13 mm

73. palstan koko 11,6 ha, maksimivirhe 0,4 ha

74. a) 24 cm b) 108 %

75. 0,22 dl

76. 88 %

77. a) kääntäen
b) 4 h 40 min

78. 3 pumppua lisää

79. 95 m

80. 15 mm

81. 1,2 m

3. Työvälineitä II – Potenssi- ja eksponenttiyhtälöt

82. a) $x \approx 2{,}92$
b) $x \approx \pm 1{,}19$
c) $x \approx \pm 1{,}05$

83. a) $y \approx -1{,}10$
b) $h \approx \pm 1{,}32$
c) ei ratkaisua

84. a) $x = \sqrt[5]{-30} \approx -1{,}97$
b) $x = \sqrt[3]{24} \approx 2{,}88$
c) $x = \pm\sqrt[4]{\frac{8}{27}} \approx \pm 0{,}74$

85. a) $x = -2$
b) $x = \pm 3$
c) ei ratkaisua

86. a) kasvanut 6,3 %
b) vähentynyt 4,3 %

87. a) $x \approx \pm 1{,}2$
b) $x \approx 1{,}1$
c) $x \approx \pm 0{,}69$

88. a) $x \approx \pm 1{,}1$ b) $x \approx -1{,}0$

89. $(3, -64)$

90. a) $x = 1$
b) $x = -\frac{1}{4}$
c) $x = \frac{1}{4}$

91. a) $x = \frac{1}{3}$
b) $x = -\frac{1}{2}$
c) $x = -\frac{1}{2}$

92. a) $x \approx 1{,}3$ b) $x \approx 0{,}50$
c) $x \approx 0{,}57$

93. a) $x \approx 0{,}79$ b) $x \approx 1{,}7$

94. a) $x \approx 1{,}2$ b) $x \approx 0{,}78$
c) $x \approx 0{,}28$

95. a) $x \approx 3{,}7$ b) $x \approx 27{,}0$

96. $x \approx 1{,}81$

97. $x \approx 1{,}2$

98. 4^{5400} on suurempi

4.1 Eksponentiaalinen malli

99. 4,49 %

100. 8. vuodessa

101. a) 3,8 %
b) 12 vuoden jälkeen

102. elokuussa 2006

103. 0,11 %, 410 ppmv

104. 4,4 %

105. 4,5 %

106. 77 metriin

107. 6200 mk, 420 €

108. 8. harjoitusviikolla

109. a) 60 %
b) 2500 vuotta

110. vähintään 615 mg

111. a) ei päästä b) 10,4 %

112. lääkeainetta jäljellä 3,1 %, odotettava 100–120 tuntia

113. 6. päivänä

114. 14 vuodessa

115. 17 vuoden kuluttua

4.2 Lukujonot ja summat

116. a) $d = 2$ b) $a_{15} = 31$

117. 10 viikkoa

118. a) 670 000 € b) 2020

119. 7 vuotta

120. $a_n = 1{,}1 \cdot a_{n-1} - 13$,
$a_1 = 95$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

121. 27 %

122. a) $a_2 = 3\frac{1}{4}, a_3 = 2\frac{1}{2}$
$a_4 = 1\frac{3}{4}, a_{10} = -2\frac{3}{4}$

b) $a_2 = \pm 2\sqrt{2} \approx \pm 2{,}8$,
$a_3 = 2$
$a_4 = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}4$,
$a_{10} = \pm\frac{1}{4\sqrt{2}} \approx \pm 0{,}18$

123. $a_1 = 11$,
$a_{10} = 2\,883\,584$

124. $S_n = -\frac{1}{4}(1 - 3^n)$, summa ylittää miljoonan, kun $n = 14$

125. 935 vuoden kuluttua

126. a) 514 500
b) vuonna 2036

127. a) 8,2 % b) 69 milj. €

128. 499,50 €

129. 223 tonnia

130. a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$
n:n särmän pituus $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
b) pinon korkeus $2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

Kuutioiden lukumäärä	Pinon korkeus
10	1,99804…
11	1,99902…
12	1,99951…
13	1,99975…
14	1,99987…

Korkeus lähenee lukua 2.

131. Populaation koko vakiintuu 67 yksilöön.

132. a) 1790 kappaletta
b) 495 000 €

5. Työvälineitä III – Suora ja paraabeli

133. a) $k = -\frac{6}{5}$ b) $k = 3$
c) $k = 0$
d) kulmakerrointa ei määritelty

134. a) $y = x + 5$, nouseva
b) $y = \frac{7}{5}x + \frac{23}{10}$
$(y = 1{,}4x + 2{,}3)$, nouseva

135. a) $k = -3$
b) $y = -4x + 13$

136. $y = -2x + 7$

137. a) $y = -5x$
b) $y = \frac{1}{5}x + \frac{9}{5}$
c) $(0, 4)$ ja $\left(\frac{4}{5}, 0\right)$

138. a) $x = 0$, $y = \frac{1}{4}$
b) $x = -1$, $y = -4$

139. $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}$, piste on suorien leikkauspiste

140. a) $\left(84\frac{3}{5}, 66\frac{1}{5}\right)$
b) Piste on suoralla t.

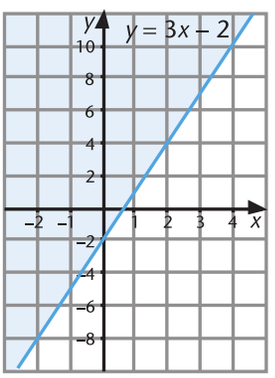
141. $a = 2$, nouseva suora

142. $\sqrt{5} \approx 2{,}24$

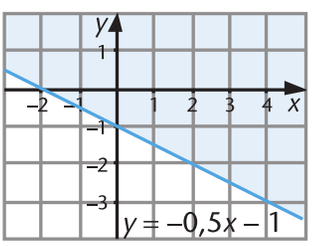
143. a) $\begin{cases} y \le \frac{3}{5}x + 3 \\ y \le -2x + 6 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y \ge -\frac{1}{2}x + 20 \\ y \ge -\frac{3}{2}x + 30 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

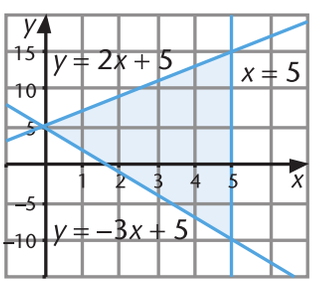
144. a)



b)



145.



146. Alue on suunnikas, $A = 13\frac{1}{2}$.

147. nollakohdat $x = 3$ tai $x = -1\frac{1}{2}$, huippupiste $\left(\frac{3}{4}, -10\frac{1}{8}\right)$

148. a) aukeamissuunta: ylös, nollakohdat: $x = -6$ ja $x = 4$, huippu: $(-1, -25)$
b) aukeamissuunta: alas, nollakohdat: $x = 2$ ja $x = 8$, huippu: $(5, 18)$

149. a) nollakohta $x = 9$,
b) $a = -\frac{7}{18}$

150. a) $(-3, 15)$ ja $(4, -6)$
b) $(0, 5)$ ja $\left(\frac{2}{3}, 3\frac{2}{3}\right)$

151. $(-1, 3)$ ja $(5, -9)$

152. a) $a < 4$ b) $a = 3\frac{1}{2}$

153. $a = 9$, paraabeli aukeaa ylöspäin

154. $y = -5x - 1$,
$y = 2x^2 - 5x - 3$

155. a) $x = 6$, $y = 13$, $z = 1$
b) $a = -2$, $b = -7$, $c = 8$

156. a) $\begin{cases} x = 5 \\ y = -4 \\ z = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 1\frac{2}{5} \\ y = 6\frac{3}{5} \\ z = -1 \end{cases}$

157. $y = -x^2 + 4x - 3$

158. $g(x) = -3x^2 + 24x - 45$

6.1 Suora ja paraabeli matemaattisina malleina

159. Vastike y riippuu alasta x seuraavasti:
$y = 1{,}8x + 62$.
a) 159,20 €
b) 32 m^2

160. 3 kupillista suodatinkahvia, 2 kupillista pannukahvia

161. (4, 2), etäisyys 4,5 km

162. vähintään 60 kertaa

163. a) 4,8 m b) 650 m^2

164. a) $y = 400x + 30\,000$
b) 36 800

165. $y = 0{,}875x - 76{,}5$;
98,5 kg

166. särkiä 350 kpl, lahnoja 90 kpl

167. 8 aikuista, 5 poikasta

168. 26 km

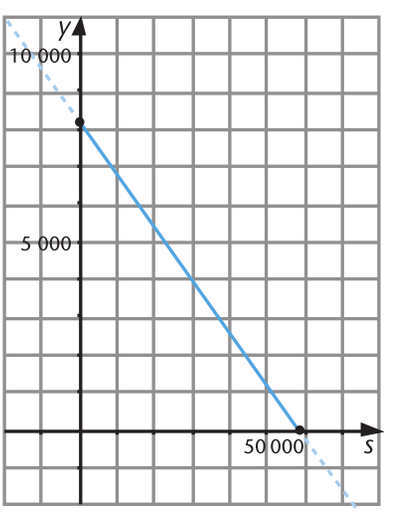
169. 6,3 km

170. vähintään 18 kertaa

171. perusmaksu 6,60 €,
0,90 €/km

172. Antti: $y = 120x$,
Auli: $y = 30 + 100x$.
Antti saavuttaa Aulin 1,5 tunnin kuluttua.

173. $y = 82\,000 - \frac{7}{5}s$,
määrittelyväli
$19\,300 \le s \le 55\,000$



174. a) 3,6 m b) 0,2 m

175. 90 cm

176. Kaupunkien välinen etäisyys on 250 km. Puolivälissä hinta on 600 €/m^2.

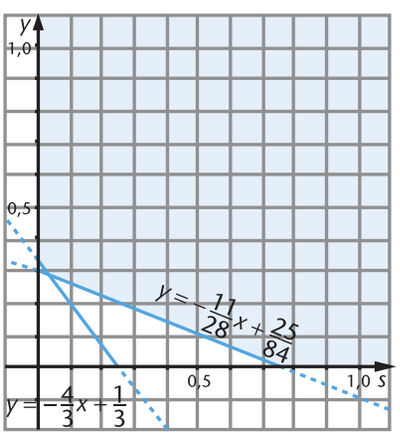
177. leveys 8 m, korkeus 4 m

178. $y = -0{,}12x^2 + 4{,}8x$; 45 henkilöä

6.2 Useamman muuttujan yhtälöitä ja epäyhtälöitä

179. Venla 58 kg, Arttu 22 kg ja Leevi 40 kg

180. $$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq -\frac{11}{28}x + \frac{25}{84} \\ y \geq -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$$



181. On matkustettava 6 päivänä junalla ja 8 päivänä bussilla, jolloin matkan pituus on 5440 km.

182. haltijoita 5 kpl, kääpiöitä 7 kpl, peikkoja 2 kpl

183. Lotta 700 €, Lassi 550 € ja Leevi 350 €

184. ruoka 40 €, polttoaine 20 €, ravintolapalvelut 30 €

185. lukioissa 122 000, ammattikorkeakouluissa 130 000, ammattikouluissa 174 000

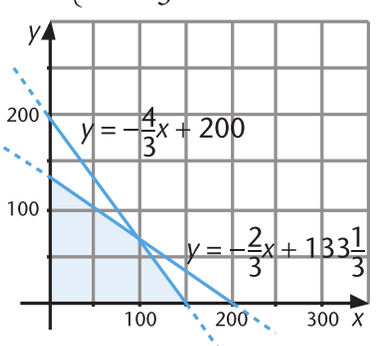
186. Patalappuja ja patakintaita valmistetaan molempia 30 kpl.

187. salaattiannoksia x kpl, piirakoita y kpl,

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 100x + 150y \leq 20000 \\ 200x + 150y \leq 30000 \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -\frac{2}{3}x + 133\frac{1}{3} \\ y \leq -\frac{4}{3}x + 200 \end{cases}$$

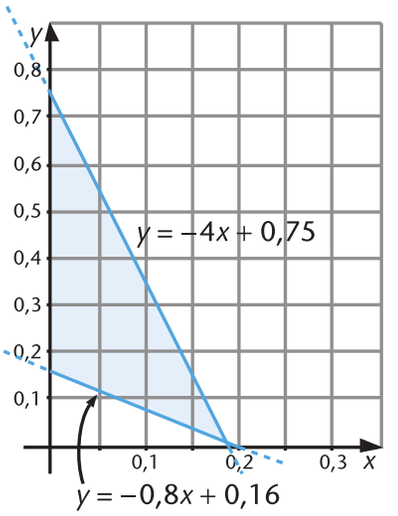


188. leikkelettä A x kg, leikkelettä B y kg,

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0{,}16x + 0{,}04y \leq 0{,}03 \\ 20x + 25y \geq 4 \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -4x + 0{,}75 \\ y \geq -0{,}8x + 0{,}16 \end{cases}$$



189. mallia A 9 kpl, mallia B 6 kpl, suurin myynti 1230 €

190. 2 insinööriä ja 24 uudisasukasta

191. moottoriteitä 240 km, pikkuteitä 280 km

7. Työvälineitä IV – Funktion analysoiminen

192. a) $f(6) = -1181$, $f'(6) = -605$
b) $f(6) = -18$, $f'(6) = 7$
c) $f(6) = 56$, $f'(6) = 20$

193. a) $x = 7\frac{1}{2}$ b) $x \geq 12$

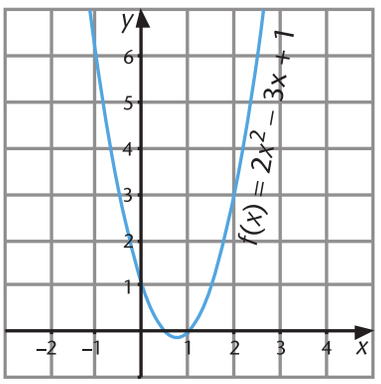
194. a) $f(x) = 0$, kun $x = 4$ tai $x = -6$; $f'(x) = 0$, kun $x = -1$
b) $f(x) = 0$, kun $x = 4$ tai $x = -5$; $f'(x) = 0$, kun $x = -\frac{1}{2}$

195. a) $t = 4$ b) –

196. a) $x = 1$ tai $x = \frac{1}{2}$

b) $x \le \frac{1}{2}$ tai $x \ge 1$

c) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$



197. a) $-3 < x < 2$

b) $x \le -7$ tai $x \ge -5$

198. a) $x = -1$

b) kasvava, kun $x \le 1$, vähenevä, kun $x \ge 1$

c) $h(1) = -2$

199. a) $x \in [-10, -6]$ tai $x \in [2, 10]$

b) $x \in [0, 2]$

200. $-3 \le x \le -2$ tai $1 \le x \le 8$

201. pienin arvo $3\frac{7}{8}$, suurin arvo 49

202. suurin arvo $2\frac{17}{24}$, pienin arvo $-88\frac{5}{6}$

203. a) pienin arvo -1, suurin arvo 4

b) $a = -3\frac{1}{2}$, suurin arvo $\frac{1}{2}$

204. Nollakohdat ovat $x = 3{,}5$ tai $x = -0{,}4$. $f(x) < 0$, kun $-0{,}4 < x < 3{,}5$

205. maksimi $h\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$, minimi $h\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{9}$

206. $f'(x) \le 4$

207. –

208. $q < \frac{1}{3}$, väli on $\frac{-2-\sqrt{4+12q}}{6} \le x \le \frac{-2+\sqrt{4+12q}}{6}$

209. $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$,

$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$,

$P_2'(x) = 3x$ ja

$P_3'(x) = \frac{15}{2}x^2 - \frac{3}{2}$

8.1 Funktion tulkintaa

210. a) 5000 kpl

b) ei

211. $0 \le x \le 5$ (m)

212. a) 240 000 euroa

b) välillä [28, 40]

c) velkaa enimmillään 80 000 euroa

213. 9 jäsentä, 45 ääntä

214. 8. päivänä 1564 kävijää

215. 4 min

216. a) 6,0 km b) 10 min

217. Tontin on oltava neliö, jonka sivu on 50 m. Sen hinnaksi tulee 87 500 euroa.

218. a) 3,4 m b) 1,4 m

219. 32 500 asukasta

220. a) $f(x) = 62x - 341$

b) 61 659 €

221.

a) $m(x) = -0{,}2x^2 - 4x + 44{,}8$

b) $x = 3{,}6$ €

222. tilavuus 4000 cm^3 = 4 l, korkeus 10 cm ja pohjan sivu 20 cm

223. a) suurin korkeus 137 cm 2-vuotiaana

b) 4,0 cm/kk

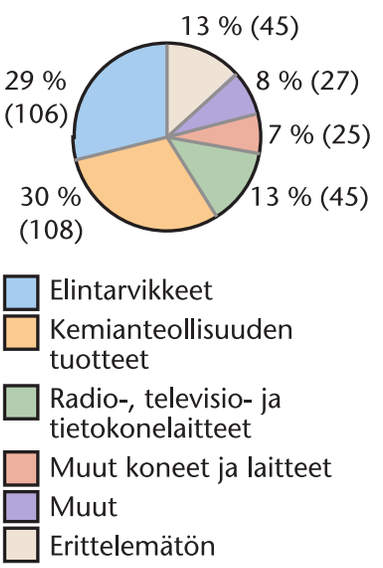
8.2 Tilastotieteen peruskäsitteitä ja tunnuslukuja

224. a) Esimerkiksi

milj. tonnia	*f*	*f* %	*sf*	*sf* %
0–255	10	66,7 %	10	66,7 %
256–511	1	6,67 %	11	73,3 %
512–767	3	20 %	14	93,3 %
768–1023	1	6,67 %	15	100 %

b) Mo = 127,75 milj. tonnia, Md = 127,75 milj. tonnia

225. a) Prosentin jäljessä on sulkuihin merkitty kulma asteen tarkkuudella.



b) 12,5 miljardia euroa

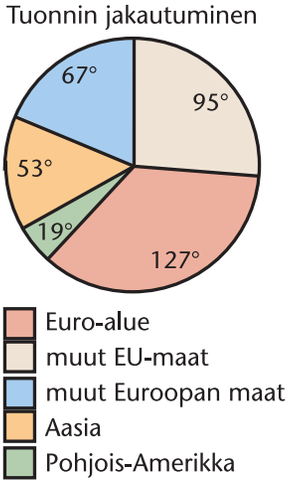
226. 6930 GWh

227. a) $\bar{x} = 48{,}9$, $s \approx 1{,}8$
b) ei

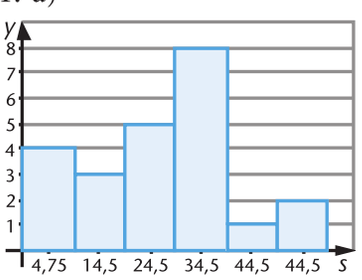
228. a) Niina b) 178,4 cm

229. a) 452 b) 2200 %

230. a) 5,2 % b) 34 %
c) Tuonnin jakautuminen



231. a)



b) Mo = 34,5 s,
Md = 24,5 s,
$\bar{x}$ = 26,7 s

232. a)

x	*f* %	*sf*	*sf* %
20–29	24 %	8	24 %
30–59	35 %	20	59 %
60–99	21 %	27	79 %
100–149	12 %	31	91 %
150–299	9 %	34	100 %

b) Mo = 44,5 (m^2)
Md = 44,5 (m^2)
c) $\bar{x} \approx 72{,}3$ (m^2)

233. a) $\bar{x} = 6{,}7$, $s = 0{,}7$
b) 6 c) ei
d) poikkeaa

234. keskiarvo 7,5 ja
kokeiden keskihajonta
$s_n \approx 0{,}3$ ($s_{n-1} \approx 0{,}4$)

235. 3,6 kg

236. –

237. a) 44 vuotta
b) 36 vuotta
c) 51 vuotta d) 65 %
e) 33 %

238. (–3, –25)

9.1 Todennäköisyyden perustilanteita

239. a) 0,04 b) 0,12
c) 0,01

240. a) 203 212 800
b) 105 c) 840
d) 0,27

241. a) 0,02 b) 0,003
c) 0,08

242. a) 0,96 b) 0,86

243. a) 0,75 b) 0,83

244. 0,077

245. a) 0,33 b) 0,19
c) 0,67

246. a) 0,56 b) 0,39

247. 0,008

248. a) 0,18 b) 0,22

249. a) 0,57 b) 0,66

250. a) 0,50 b) 0,40

251. 0,44

252. $\frac{1}{21}, \frac{2}{21}, \frac{3}{21}, \frac{4}{21}, \frac{5}{21}, \frac{6}{21}$,
8,2 %

253. a) 32 b) 3003

254. a) 15 b) $\frac{1}{5} = 0{,}20$

255. suurempi
todennäköisyys
P(”ainakin yksi oikein”) $\approx 0{,}78$

256. 0,02

257. 0,014

9.2 Todennäköisyys-jakaumia

258. 0,15

259. 0,09

260. 0,017. Päättelyä ei voi soveltaa kengännumeron tapaukseen, sillä suureet eivät ole toisistaan riippumattomia.

261. $\sigma = 3{,}0$ g

262. a) 0,41 b) 0,039
c) 0,22

263. 0,017

264. 0,66

265. 0,048

266. 0,03 %

267. 0,44

268. 0,37

269. 150

270. 38 pistettä

Hakemisto

A
aritmeettinen lukujono 66
aritmeettinen summa 66

B
binomitodennäköisyys 154

D
derivaatan merkki 111
derivaatan merkkikaavio 111
derivaatta 110

E
eksponentiaalinen muutos 47, 56, 57
eksponenttiyhtälö 50, 57
ensimmäisen asteen yhtälö 7
epäyhtälöryhmä 78, 100

F
frekvenssi 129
funktion arvo 108, 118
funktion kulku 110, 120
funktion kulkukaavio 111
funktion merkki 109, 119
funktion ääriarvot 111

G
geometrinen lukujono 68
geometrinen summa 68
geometrinen todennäköisyys 142

H
haarukointi 48
halkaisija 18

K
kaaren pituus 18
kahden muuttujan epäyhtälö 78
kahden pisteen etäisyys 90
kartion tilavuus 30, 33
kehän pituus 18
kertolaskusääntö 144
kertoma 143
keskiarvo 133
keskihajonta 133
kohtisuoruusehto 75, 89
kolmion ala 31
kombinaatio 143
komplementti 146
kosini 17
kulmakerroin 74, 87

L
leveyspiiri 18
lieriön tilavuus 29
logaritmi 50
luokkakeskus 129

M
mediaani 129
mittakaava 40, 42
moodi 129

N
nimittäjien poistaminen 10
nollakohta 76, 80, 81, 109
nopeus 17
normaalijakauma 156
normitettu arvo 134, 156

O
optimointi 101

P
pallon ala 27
pallon tilavuus 28
paraabeli 79, 92, 113
paraabelin huippu 80
pienin arvo 102, 111
pinta-ala 27, 29–33
pituuspiiri 18
polynomien kertolasku 9
potenssiyhtälö 48, 56
prosentti 39
prosenttikerroin 39, 47
puolisuunnikkaan ala 31
pyramidin tilavuus 30
Pythagoraan lause 22

R
ratkaisukaava 8
rekursiivinen lukujono 70

S
sektoridiagrammi 131
sektorin ala 32
sini 17
suhteellinen frekvenssi 129
suhteellinen summafrekvenssi 129
summafrekvenssi 129
suoran yhtälö 74, 75, 87, 89
suunnikkaan ala 30
suurin arvo 102, 111, 122, 124

T
tangentti 17, 20
tasakylkinen kolmio 19
tasasivuinen kolmio 19
tiheys 28, 40
tilavuus 28–30
toisen asteen epäyhtälö 109
toisen asteen yhtälö 7
toistokoe 154
trigonometriset funktiot 17
tulon nollasääntö 11
tuloperiaate 143

V
vaipan ala 29, 33
verrannollisuus 41, 43
verranto 8, 41, 43

Y
yhdensuuntaisuusehto 75
yhteenlaskusääntö 145
yhtälöpari 77, 88
yhtälöryhmä 78, 98
ympyräkartion tilavuus 33
ympyrän ala 27
ympyrän tangentti 20